















مساواتوں کا نظریہ

جلد اول



11/11/11

11/11





تصانیف علامہ عارف عثمانی

# مساواتوں کا نظریہ

جلال

تصنیف

ڈبلیو۔ ایس۔ برنسائڈ ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

اے۔ ڈبلیو۔ پیانٹن ایم۔ اے، ڈی۔ ایس۔ سی

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن دارالترجمہ جامعہ عثمانیہ کراچی

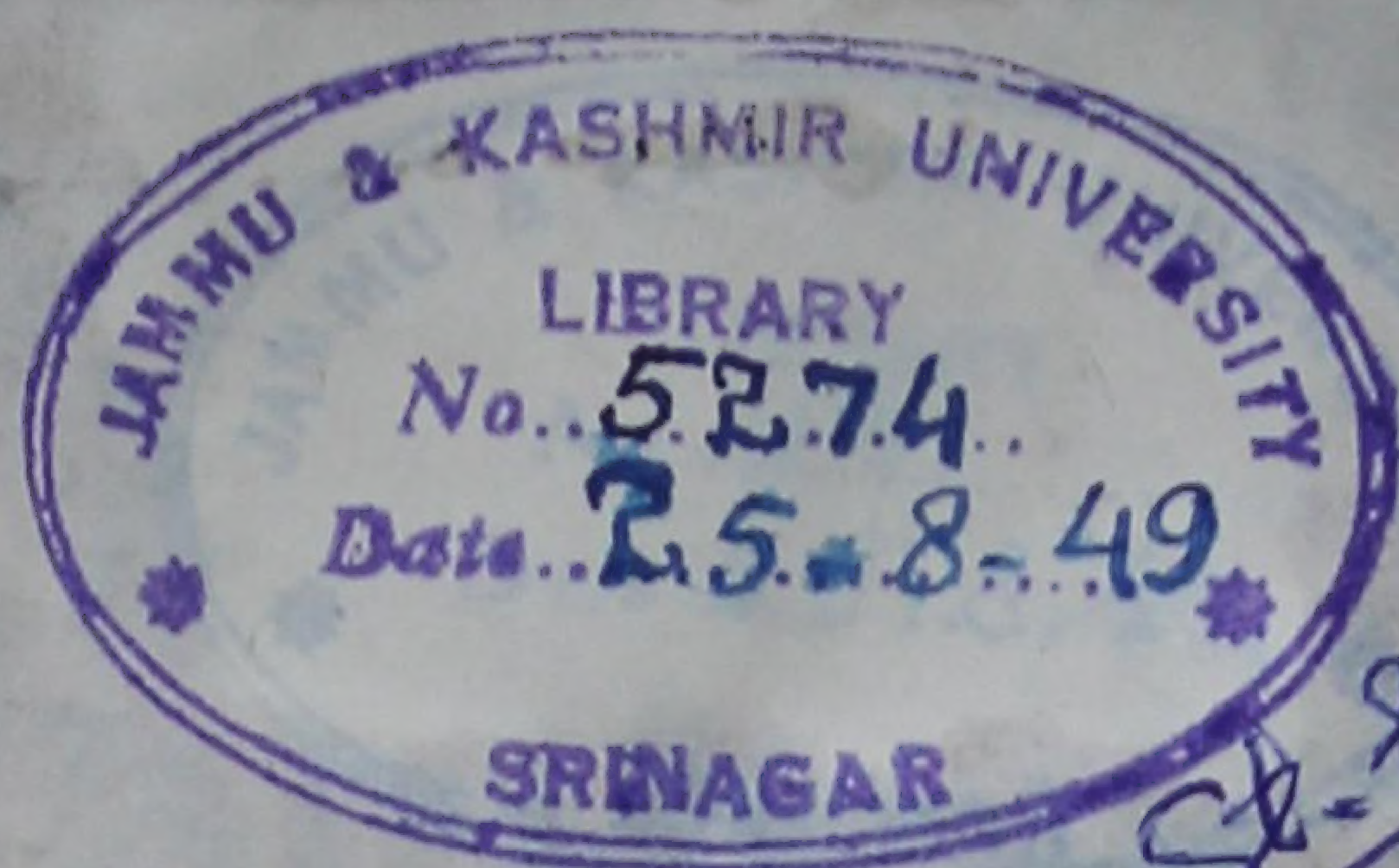
۱۳۵۳ھ ۱۳۴۳ھ ۱۳۴۴ھ ۱۹۲۴ء

دارالطبع عثمانیہ کراچی





516  
P 261



col. S.



# فہرست مضامین

## مساواتوں کا نظریہ

جلد اول

تہہ ہید

صفحہ

صفحہ

۱  
۲  
۳

- ۱ - تعریفات -
- ۲ - عددی اور جبری مساواتیں -
- ۳ - کثیرالارقام -

## پہلا باب

کثیرالارقام کے عام خواص

- ۴ - کثیرالارقام سے متعلق مسئلہ جبکہ متغیر کو بڑی قیمتیں دی جائیں -
- ۵ - متشابہ مسئلہ جبکہ متغیر کو چھوٹی قیمتیں دی جائیں -

۶



صفحہ

دفعہ

- ۶ - متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیر الارقام کی شکل میں تبدیلی، مشتق تقابلی - ۱
- ۷ - منطق صحیح تفاعل کا تسلسل - ۱۳
- ۸ - خارج قسمت اور باقی کی شکل جبکہ کسی کثیر الارقام کو ایک ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے - ۱۴
- ۹ - تقابلوں کی جدول - ۱۶
- ۱۰ - کثیر الارقام کی تریسمی تبصرہ - ۱۸
- ۱۱ - کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں - ۲۳

## دوسرا باب

### مساواتوں کے عام خواص

- ۱۲، ۱۳، ۱۴ - مساواتوں کی حقیقی اصولوں سے متعلق مسئلے - ۲۴
- ۱۵ - عام مساوات میں ایک اصل کی موجودگی، خیالی اصلیں - ۲۷
- ۱۶ - مساوات کی اصولوں کی تعداد سے متعلق مسئلہ - ۲۸
- ۱۷ - مساوی اصلیں - ۳۲
- ۱۸ - مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں - ۳۳
- ۱۹ - مثبت اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون علامت - ۳۶
- ۲۰ - منفی اصولوں کیلئے ڈیکارٹ کا قانون علامت - ۳۸
- ۲۱ - خیالی اصولوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے قانون کا استعمال - ۳۸
- ۲۲ - وہ مسئلہ جو متغیر کی بجائے دو دئے ہوئے اعداد درج کرنے سے متعلق ہے - ۳۹



صفحہ

۴۱

دفعہ

مثالیں

## تیسرا باب

مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے دریا  
روابط اور اصلوں کے متشاكل تفاعلوں کا استعمال

۴۶

۲۳ - اصلوں اور سروں کے درمیان روابط -

۴۸

۲۴ - مسئلہ کے اطلاقات -

۲۵ - مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں میں

۵۶

کوئی ربط موجود ہو -

۵۸

۲۶ - اکائی کے جذرا لکعب -

۴۶

۲۷ - اصلوں کے متشاكل تفاعل -

۶۵

مثالیں -

۷۳

۲۸ - متشاكل تفاعلوں سے متعلق مسائل -

۷۴

مثالیں -

## چوتھا باب

مساواتوں کا استحالة

۸۴

۲۹ - مساواتوں کا استحالة -

۸۴

۳۰ - اصلیں یہ تبدیل علامت -

۸۵

۳۱ - دی ہوئی مقدار سے اصلوں کو ضرب دینا -



| صفحہ | دفعہ   |
|------|--|
| ۸۸   | ۳۲ - متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں -  |
| ۹۰   | ۳۳ - اصلوں کو بقدر ایک دی ہوئی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا -                     |
| ۹۴   | ۳۴ - رتسموں کا اخراج -   |
| ۹۶   | ۳۵ - ثنائی سر -  |
| ۱۰۱  | ۳۶ - کعبی -  |
| ۱۰۳  | ۳۷ - چار درجہ -  |
| ۱۰۶  | ۳۸ - ہم رسم استحالہ -  |
| ۱۰۸  | ۳۹ - متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ استحالہ -   |
|      | ۴۰ - وہ مساوات بنانا جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی<br>اصلوں کی کوئی قوتیں ہوں - |
| ۱۱۰  | ۴۱ - استحالہ کی عام صورت -   |
| ۱۱۴  | ۴۲ - کعبی کی مربع دار فرقوں کی مساوات -  |
| ۱۱۶  | ۴۳ - کعبی کی اصلوں کی جانچ -   |
| ۱۱۹  | ۴۴ - عام صورت میں فرقوں کی مساوات -  |
| ۱۲۱  | مثالیں -   |
| ۱۲۲  |  |

## پانچواں باب

### متکافی اور ثنائی مساواتوں کا حل

|     |   |
|-----|---|
| ۱۳۰ | ۴۵ - متکافی مساواتیں -  |
|     | ۴۶ تا ۵۲ - ثنائی مساواتیں - مسائل جنہیں ثنائی مساواتوں کے<br>خاص خواص درج ہیں - |
| ۱۳۴ | ۵۳ - لا = ۱ - کی خاص اصلیں -  |
| ۱۳۸ | ۵۴ - ثنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا -                         |
| ۱۴۳ |   |



صفحہ

۱۴۵

دفعہ

مثالیں

# چھٹا باب

## کعبی اور چار درجہ کا جبری حل

- ۱۵۵ - ۵۵ - مساواتوں کا جبری حل -
- ۱۵۹ - ۵۶ - کعبی مساوات کا جبری حل -
- ۱۶۱ - ۵۷ - عددی مساواتوں پر استعمال -
- ۱۶۲ - ۵۸ - کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا -
- ۱۶۳ - ۵۹ - اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ کعبی کا حل -
- ۱۶۴ - مثالیں
- ۱۶۶ - ۶۰ - کعبی کی دو اصلوں کے درمیان ہم رسم ربط -
- ۱۶۷ - ۶۱ - چار درجہ کا پہلا حل جذروں کے ذریعہ -
- ۱۸۳ - مثالیں -
- ۱۸۷ - ۶۲ - جذروں کے ذریعہ چار درجہ کا دو سیرا حل -
- ۱۹۰ - ۶۳ - چار درجہ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا -
- ۱۹۶ - ۶۴ - چار درجہ کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا - دوسرا طریقہ -
- ۱۹۹ - ۶۵ - چار درجہ کا استحالة متکافی شکل میں -
- ۲۰۴ - ۶۶ - اصلوں کے متشاکل تفاعلوں سے چار درجہ کا حل -
- ۲۰۹ - ۶۷ - چار درجہ کی مربع دار فرقوں کی مساوات -
- ۲۱۲ - ۶۸ - چار درجہ کی اصلوں کی نوعیت کی جانچ -
- ۲۱۳ - مثالیں -



صفحہ

صفحہ

# ساتواں باب

## مشتق تفاعلوں کے خواص

- ۶۹ - مشتق تفاعلوں کی ترکیبی تعبیر۔ ۲۲۹
- ۷۰ - کثیرالارقام کی اعظم اور اقل قیمتوں سے متعلق مسئلہ۔ ۲۳۰
- ۷۱ - رول کا مسئلہ۔ نتیجہ صریح۔ ۲۳۳
- ۷۲ - مشتق تفاعلوں کی ترکیب۔ ۲۳۴
- ۷۳ - ضعیفی اصلوں سے متعلق مسئلہ۔ ۲۳۵
- ۷۴، ۷۵ - وہ مسئلے جو مساوات کی ایک اصل میں سے متغیر کے  
مرور سے متعلق ہیں۔ ۲۳۹

۲۴۱

مثالیں

# آٹھواں باب

## اصلوں کے متشاكل تفاعل

- ۷۷ - نیوٹن کا مسئلہ اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں پر۔ ۲۴۵
- مسئلہ ۱۔
- ۷۸ - کسی جبری مساوات کی اصلوں کے متشاكل تفاعل کو  
سروں کی رقوم میں منطبق طور پر بیان کرتا۔ مسئلہ ۲۔ ۲۴۸
- ۷۹ - اصلوں کی قوتوں کے مجموعوں کو سروں کی رقوم میں  
بیان کرنے کے لئے ایک اور مسئلہ۔ مسئلہ ۳۔ ۲۵۲
- ۸۰ - سروں کو اصلوں کی قوتوں کی رقوم میں بیان کرنا۔ ۲۵۳
- ۸۱ - متشاكل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن اور رتبہ سے متعلق مسئلہ۔ ۲۵۶



صفحہ

۲۵۹

۲۶۵

دفعہ

۸۲ - اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کو محسوب کرنا۔

۸۳ - متجانس حاصل ضرب۔

## نواں باب

### مساواتوں کی اصلوں کی انتہائیں

۲۶۹

۲۷۰

۲۷۱

۲۷۳

۲۷۶

۲۷۹

۲۷۹

۲۸۱

۸۴ - انتہاؤں کی تعریف۔

۸۵ - اصلوں کی انتہائیں - مسئلہ ۱۔

۸۶ - اصلوں کی انتہائیں - مسئلہ ۲۔

۸۷ - عملی اطلاقات۔

۸۸ - انتہائیں معلوم کرنیکا نیوٹن کا طریقہ - مسئلہ ۳۔

۸۹ - سفلی انتہائیں اور منفی اصلوں کی انتہائیں۔

۹۰ - انتہائی مساواتیں۔

مثالیں۔

## دسواں باب

### مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنا

۲۸۳

۲۸۴

۲۸۷

۲۹۲

۲۹۶

۹۱ - عام تشریح۔

۹۲ - فوریر اور یوڈان کا مسئلہ۔

۹۳ - اس مسئلہ کا استعمال۔

۹۴ - اس مسئلہ کا استعمال خیالی اصلوں پر۔

۹۵ - فوریر اور یوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح۔



| صفحہ | دفعہ   |
|------|--|
| ۲۹۷  | ۹۶ - اسٹرم کا مسئلہ -                            |
| ۳۰۷  | ۹۷ - اسٹرم کا مسئلہ - مساوی اصلیں -              |
| ۳۱۱  | ۹۸ - اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال -                 |
| ۳۱۷  | ۹۹ - مساوات کی اصلوں کے حقیقی ہونی کی شرطیں -    |
| ۳۱۹  | ۱۰۰ - چار درجہ کی اصلوں کے حقیقی ہونی کی شرطیں - |
| ۳۲۰  | مثالیں -   |

## گیارہواں باب

### عددی مساواتوں کا حل

|     |  |
|-----|--|
| ۳۲۶ | ۱۰۱ - جبری اور عددی مساواتیں -                             |
| ۳۲۷ | ۱۰۲ - متوافق اصلوں سے متعلق مسئلہ -                        |
| ۳۲۸ | ۱۰۳ - نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ -                      |
| ۳۳۰ | ۱۰۴ - مقسوم علیہم کے طریقہ کا استعمال -                    |
| ۳۳۴ | ۱۰۵ - آزمائشی مقسوم علیہم کی تعداد کو محدود کرنیکا طریقہ - |
| ۳۳۶ | ۱۰۶ - ضعیفی اصلوں کی تعیین -                               |
| ۳۴۱ | ۱۰۷ - نیوٹن کا تقرب کا طریقہ -                             |
| ۳۴۳ | ۱۰۸ - عددی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے ہارنر کا طریقہ -     |
| ۳۴۸ | ۱۰۹ - آزمائشی مقسوم علیہم کا اصول -                        |
| ۳۵۴ | ۱۱۰ - ہارنر کے عمل کا اختصار -                             |
| ۳۵۹ | ۱۱۱ - ہارنر کے طریقہ کا استعمال مساوی اصلوں کی صورت میں -  |
| ۳۶۴ | ۱۱۲ - تقرب کا لگرنج کا طریقہ -                             |
| ۳۶۶ | ۱۱۳ - ڈیکارٹ کے طریقہ سے چار درجہ کا عددی حل -             |
| ۳۶۹ | متفرق مثالیں -   |



صفحہ

دفعہ

## بارہواں باب

## ملقف اعداد اور ملقف متغیر

|     |   |
|-----|---|
| ۳۷۷ | ۱۱۳ - ملقف اعداد - تریبھی تعبیر -                     |
| ۳۷۹ | ۱۱۵ - ملقف اعداد - جمع اور تفریق -                    |
| ۳۸۱ | ۱۱۶ - ضرب اور تقسیم -                                 |
| ۳۸۲ | ۱۱۷ - ملقف عددوں پر دیگر اعمال -                      |
| ۳۸۲ | ۱۱۸ - ملقف متغیر -                                    |
| ۳۸۵ | ۱۱۹ - ملقف متغیر کے تفاعل کا تسلسل -                  |
|     | ۱۲۰ - تفاعل کی سمت کا تغیر جب ملقف متغیر چھوٹا بندھنی |
| ۳۸۶ | مرسم کرے -  |
| ۳۸۹ | ۱۲۱ - کوششی کا مسئلہ -                                |
|     | ۱۲۲ - عام مساوات کی اصلوں کی تعداد سے متعلق بنیادی    |
| ۳۹۱ | مسئلہ کا ثبوت -                                       |
| ۳۹۲ | ۱۲۳ - بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت -                    |
| ۳۹۴ | ۱۲۴ - ملقف عددی اصلوں کی تعین - کعبی کا حل -          |
| ۳۹۹ | ۱۲۵ - چار درجہ کا حل -                                |
| ۴۰۳ | ۱۲۶ - چار درجہ کا حل (گزشتہ سے پیوستہ) -              |



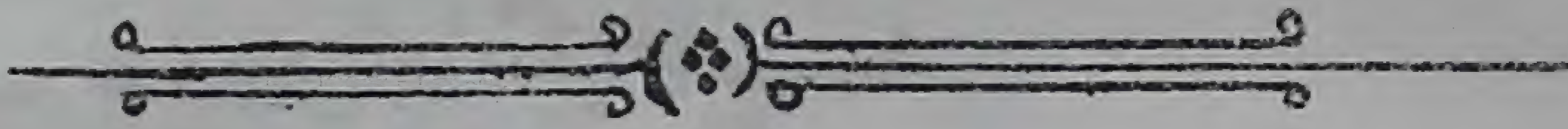
صفحہ

نوٹ (پ)۔ عددی مساواتوں کا حل ۴۱۵

نوٹ (ج)۔ یہ مسئلہ کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے۔ ۴۲۱

اشارہ -

۴۲۵





(1)

## مساواتوں کا نظریہ

### تمہید

۱۔ تعریفات :- کسی ریاضی جملہ کو جس میں ایک مقدار شامل ہو اس مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔  
 ہیں خاص کر ایسے جبری جملوں سے سابقہ پڑے گا جو منطق اور مکمل ہونگے۔  
 کسی مقدار کے منطق تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف منطق شکل میں موجود ہو یعنی ایسی شکل میں جو کسری قوت نما اور علامت جذر سے آزاد ہو۔ کسی مقدار کے مکمل تفاعل سے وہ تفاعل مراد ہے جس میں یہ مقدار صرف مکمل شکل میں موجود ہو یعنی کسر کے نسب نما میں ہرگز نہ آئے۔ مثلاً جملہ ذیل جس میں ن مثبت صحیح عدد ہے لا کا ایک منطق اور مکملہ جبری تفاعل ہے :-

$$لا^۱ + ب لا^{۱-ن} + ج لا^{۲-ن} + ..... + ک لا + ل$$

یہ یاد رہے کہ یہ تعریف صرف مقدار لا کے لحاظ سے ہے جس کا جملہ بالا تفاعل قرار دیا گیا ہے۔ مختلف سر ۱، ب، ج وغیرہ غیر منطق یا کسری ہو سکتے ہیں اور پھر بھی لا کا یہ تفاعل منطق اور مکملہ ہوگا۔  
 اختصار کی خاطر لا کا تفاعل فا (لا) ف (لا) ف (لا) یا ایسی ہی



کسی علامت سے تعبیر کیا جاتا ہے۔  
ایسے جبری تفاعل کو کثیر الارقام اس وجہ سے کہا جاتا ہے کہ وہ لا کی  
مختلف قوتوں والی رقموں سے جو مثبت یا منفی علامتوں سے ملا دی  
گئی ہوں بنتا ہے۔

(2)

اگر لا کو متغیر قرار دیا جائے تو اس کی بعض قیمتوں کے لئے ایک کثیر الارقام  
دوسرے کثیر الارقام کے مساوی ہو سکتا ہے جو بالکل جداگانہ طور پر بنا ہو۔ اس  
قسم کے ربط کو اگر جبری طور پر ظاہر کیا جائے تو اس کو مساوات کہتے ہیں  
اور لا کی کوئی قیمت جو اس مساوات کو پورا کرے اس مساوات کی اصل کہلاتی  
ہے۔ تمام ممکن اصلوں کو معلوم کرنے کا نام مساوات کا مکمل حل ہے۔  
یہ ظاہر ہے کہ تمام رقموں کو ایک طرف لانے سے ہم کسی مساوات کو  
لا کی نزولی قوتوں میں حسب ذیل طریقہ پر ترتیب دے سکتے ہیں:-

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 = 0$$

اس مساوات میں چونکہ بڑی سے بڑی قوت  $n$  ہے اس لئے اس کو  
لائن  $n$  ویں درجہ کی مساوات کہتے ہیں۔ ایسی مساوات کے لئے  
ہم عام طور پر شکل مندرجہ بالا استعمال کریں گے۔  $a$  کے لاحقہ سے معلوم ہو سکتا  
ہے کہ کونسا عددی سر لا کی کس قوت کے ساتھ ہے کیونکہ ہر رقم میں لا کی قوت  
اور  $a$  کے لاحقہ کا مجموعہ  $n$  رہتا ہے۔ کوئی مساوات نہیں بدلتی اگر ہم  
اس کی سب رقموں کو کسی مقدار سے تقسیم کریں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو  $a$  سے  
تقسیم کر کے مساوات باللائن  $n$  کا سر ایک بنا سکتے ہیں۔ اس قسم کا عمل اکثر سہولت  
بخش ہوگا اور ایسی صورتوں میں مساوات بالاشکل

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + a_0 = 0$$

میں لکھی جائے گی۔  
مساوات کو مکمل ہم اس وقت کہیں گے جب اس میں  $n$  سے صفر تک



قوت رکھنے والی لا کی سب رقمیں موجود ہوں اور غیر مکمل اس وقت جب بعض رقمیں موجود نہ ہوں یعنی جب  $a, b, c, \dots$  وغیرہ سروں میں سے بعض صفر کے مساوی ہوں۔ رقم بن کو جس میں لا شامل نہیں ہے مطلق رقم کہتے ہیں۔ مساوات کو عددی یا جبری کہا جائے گا ہو جب اس کے کہ اس کے سر اعداد یا جبری حروف ہوں۔

۲۔ عددی اور جبری مساواتیں۔ ریاضیات و طبیعیات کی اکثر تحقیقوں

میں بالآخر ہم ایک ایسے ریاضی مسئلہ پر پہنچتے ہیں جو ایک مساوات کی شکل میں رہتا ہوتا ہے اور اس مساوات کے حل پر اس مسئلہ کا حل منحصر ہوتا ہے۔ اس لئے یہ فطری بات ہے کہ تاریخ سائنس کی ابتدائی منزل میں ہی علماء ریاضی کی توجہ اس نوعیت کے سوالات کی طرف منعطف ہوئی چنانچہ نظریہ معادلات کا علم جو اس وقت موجود ہے علماء ریاضی کی مسلسل کوششوں کا نتیجہ ہے جو انہوں نے کسی درجہ کی مساواتوں کے حل کرنے کے لئے عام طریقوں کے دریافت کرنے میں صرف کیں۔ جب کسی مساوات کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو ایسی عددی قیمت یا جہاں ممکن ہو ایسی مختلف عددی قیمتوں کے دریافت کر نیکا مسئلہ پیش ہوتا ہے جو اس مساوات کو پورا کریں۔ نظریہ معادلات کے اس شعبہ میں بہت بڑی ترقی ہو چکی ہے اور اصولوں کی عددی قیمتوں کو معلوم کرنے کے بہترین طریقے جو اب تک معلوم ہوئے خواہ یہ قیمتیں تقریبی ہوں یا بالکل ٹھیک اس کتاب میں اپنے اپنے مناسب مقام پر درج کئے جائیں گے۔

اتنی ہی ترقی ان مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں نہیں ہوئی جن کے سر جبری حروف ہوں طالب علم یہ جانتا ہوگا کہ مساوات درجہ دوم کی اصل کو ایک عام ضابطہ کی شکل میں سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جبکہ مساوات کے سر حروف سے تعبیر ہوں اور یہ کہ کسی خاص عددی مساوات کی عددی اصلیں اس ضابطہ میں حروف کی بجائے متناظر اعداد مندرج کرنے سے حاصل ہوسکتی ہیں۔ اس لئے فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اسی قسم کا ضابطہ اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے



حل کے لئے دریافت کرنا ممکن ہے چنانچہ اس قسم کے ضابطے تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساواتوں کے لئے حاصل کر لئے گئے ہیں لیکن اس کے ساتھ یہ بات بتا دینا ضروری ہے کہ بعض صورتوں میں ان ضابطوں میں حروف کی بجائے عددوں کے اندراج سے صحیح حل نہیں ملتا اور اس لئے اس لحاظ سے یہ ضابطے مساوات درجہ دوم کے جبری حل سے کمزور درجہ رکھتے ہیں۔

پانچویں اور اس سے اعلیٰ درجوں کی مساواتوں کے حل کے لئے اس قسم کے عام ضابطوں کو دریافت کرنے میں اندھ کو ششیں کی گئیں لیکن تحقیقات جدید سے یہ بات پایہ ثبوت کو پہنچ چکی ہے کہ پانچویں یا اس سے اعلیٰ درجہ کی مساوات کی اصل کو جذری علامتوں اور جبر و مقابلہ کے دوسرے عام اعمال کی مدد سے سروں کی رقوم میں بیان کرنا ناممکن ہے۔

۳۔ کثیرالارقام۔ مشاہدات ماسبق سے ظاہر ہے کہ نظریہ مساوات کے علم (4)

کا ایک اہم مقصد متغیر مقدار لاکھ کی وہ قیمتیں معلوم کرنا ہے جن کے اندراج سے کثیرالارقام  $f(x)$  کی قیمت صفر ہو جائے۔ لاکھ کی ایسی قیمتوں کو معلوم کرنے کی کوشش میں متعدد سوالات پیش ہونگے جو لاکھ کی دوسری قیمتوں کے لئے کثیرالارقام کی اختیار کردہ قیمتوں سے متعلق ہونگے۔ چنانچہ آئندہ باب میں فی الواقعہ ہم یہ دیکھیں گے کہ لا انتہا بڑی منفی مقدار  $(-\infty)$  سے لا انتہا بڑی مثبت مقدار  $(+\infty)$  تک متغیر ہونے والی لاکھ کی قیمتوں کے مسلسل سلسلہ کے جواب میں  $f(x)$  (لا) بھی ایسی قیمتیں اختیار کرتا ہے جو مسلسل بدلتی ہیں۔ اس قسم کے تغیرات کا علم کثیرالارقام کے نظریہ کا ایک بہت ہی اہم حصہ ہے۔ عددی مساواتوں کا عام حل فی الحقیقت محنت طلب عمل ہے اور متغیر لاکھ کی بعض اختیاری قیمتوں کے جواب میں کثیرالارقام کی اختیار کردہ قیمتوں پر غور کرنے سے گو ہم خود اصل کو نہ معلوم کر سکیں کم از کم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ مساوات کی اصل کن حدود کے اندر واقع ہے اور پھر اپنے عمل کو وسیع تر کر کے زیادہ قریب تر حدود دریافت کر سکتے ہیں۔



کثیر الارقام کو بعض اوقات کثیر درجی (Quantic) کہا جاتا ہے۔  
 مختلف درجوں کے کثیر درجی جملوں کو مختلف نام دینا سہولت بخش ہے چنانچہ  
 دو درجی (کبھی) چار درجی، پنج درجی شش درجی وغیرہ ان  
 کثیر درجی جملوں کو تعبیر کرنے میں استعمال ہونگے جو علی الترتیب دوسرے تیسرے  
 چوتھے، پانچویں، چھٹے وغیرہ درجوں کے ہوں۔ ان کثیر درجی جملوں کو  
 صفہ کے مساوی رکھنے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں ان کو علی الترتیب  
 مساوات درجہ دوم، مساوات درجہ سوم یا کبھی مساوات، مساوات درجہ چہارم وغیرہ  
 کہتے ہیں۔









(5)

— 114 —

۴۔ متغیر (لا) کی مختلف قیمتوں کے متناظر کثیر الارقام کی قیمت میں تبدیلیوں کا مشاہدہ کرتے وقت ہمیں پہلے یہ دریافت کرنا ہوگا کہ جب متغیر لا کو بہت بڑی یا بہت چھوٹی قیمت دیکھائے تو کثیر الارقام میں اہم ترین حصہ لینے والی ارقام کونسی ہوں گی۔ اس باب کے مختلف دفعات میں اسی پر روشنی ڈالی جائیگی۔

کثیر الأرقام :  $1 + 1 + \dots + 1$

$$\left[ \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1-1} \cdot \frac{1-1}{1} + \dots + \frac{1}{r-1} \cdot \frac{r-1}{1} + \frac{1}{r} \cdot \frac{r}{1} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} + 1 \right] \cdot \frac{1}{1}$$

میں رکھنے سے ظاہر ہے کہ جب 'لا' کی طرف مائل ہوتا ہے تو کثیر الارقام کی قیمت رقم  
لان کی طرف مائل ہوتی ہے۔ مسئلہ ذیل سے ایک ایسی مقدار معلوم ہو سکے گی کہ او سکویا  
اوس سے بڑی مقدار کو لا کی بجائے کثیر الارقام میں مندرج کریں تو رقم لان کی قیمت  
باقی تمام ارقام کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوگی۔ آئندہ ہم لان کو مثبت فرض کریں گے اور بالعموم  
مساواتوں اور کثیر الارقاموں کی اعلیٰ ترین قوت والی رقم مثبت علامت کی فرض کی جائیگی۔

مسئله :- اکثر کثیر الارقام

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$$

میں لاکھ بجائے  $\frac{1}{10}$  یا اس سے بڑا عدد مندرج کیا جائے جہاں کہ سرو  
۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ میں سے بلا لحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے تو رقم ۱۰۰۰۰۰ باقی



سب رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔

نامساوات

$$1 \cdot 10^n < 1 \cdot 10^{n-1} + 1 \cdot 10^{n-2} + \dots + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

پوری ہوگی لاکی کسی ایسی قیمت کے لئے جو نامساوات

(8)

$$1 \cdot 10^n < 1 \cdot 10^{n-1} + 1 \cdot 10^{n-2} + \dots + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

کو پورا کرے جہاں  $10^0, 10^1, \dots, 10^{n-1}$  میں سے بلا لحاظ علامت سب سے بڑا سر ہے۔ خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ ہندسیہ کو جمع کرنے سے

$$1 \cdot 10^n < 10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

$$یا \quad 10^n < \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

یہ نامساوات پوری ہوگی اگر

$$10^n < (10 - 1) \cdot 10$$

$$یعنی \quad 10 < 10 - 1$$

یہاں جو مسئلہ ثابت کیا گیا ہے اس کی مدد سے اُس صورت میں جبکہ کثیرالارقام کے سروئے ہوئے اعداد ہوں ہم ایک ایسا عدد معلوم کر سکتے ہیں کہ جب لا کو  $\infty$  سے قریب تر قیمتیں دی جائیں تو کثیرالارقام کی علامت ہمیشہ مثبت رہے گی۔ اگر ہم لا کی علامت بدل دیں تو کثیرالارقام کی پہلی رقم کی علامت باقی رہے گی یا منفی ہو جائے گی بموجب اس کے کہ  $n$  جفت عدد ہو یا طاق۔ اس سے ظاہر ہے کہ مسئلہ بالا کی مدد سے ہم لا کی ایک ایسی منفی قیمت بھی دریافت کر سکتے ہیں کہ  $\infty$  سے قریب تر قیمتوں کے لئے کثیرالارقام کی علامت ہمیشہ مثبت ہوگی یا منفی بموجب اسکے کہ  $n$  جفت ہو یا طاق۔ عام طور پر کثیرالارقام کی ترکیب ایسی ہوتی ہے کہ ہم یہاں معلوم کی ہوئی حدود سے زیادہ صحیح حدود جو صفر سے قریب ہوں دریافت کر سکتے ہیں جن کے باہر تفاعل



کی علامت ہمیشہ وہی رہیگی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مندرجہ بالا ثبوت میں ہم نے ناموافق ترین صورت لی ہے جس میں پہلے سر کے سوائے باقی تمام سر منفی اور اس کے مساوی ہیں حالانکہ عام طور پر سر مثبت، منفی یا صفر ہو سکتے ہیں۔ کسی آئینہ باب میں ہم وہ مسئلے کو بیان کریں گے جن کی بدد سے یہ زیادہ صحیح حدود دریافت کی جاسکتی ہیں۔

۵۔ اب ہم یہ دریافت کریں گے کہ اگر لا کی قیمت غیر محدود طور پر گھٹائی جائے تو کثیر الارقام کی کونسی رقم سب سے زیادہ اہمیت رکھتی ہے۔ نیز ہم ایک ایسی مقدار دریافت کریں گے کہ لا کی بجائے اسکو یا اس سے چھوٹی کسی قیمت کو درج کرنے سے مذکورہ بالا رقم باقی سب رقموں پر غالب ہو جائے۔

مسئلہ :- اگر کثیر الارقام

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^{2n-1}} - \frac{1}{n^{2n}} + \dots$$

میں لا کی بجائے  $\frac{1}{n}$  یا اس سے چھوٹی قیمت مندرج کی جائے جہاں  $\frac{1}{n}$  کو چھوڑ کر سب سے بڑا سر  $\frac{1}{n}$  ہے تو رقم  $\frac{1}{n}$  بلحاظ قیمت مطلق باقی تمام رقموں کے مجموعہ سے بڑی ہوگی۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$  تو دفعہ ۲ کے مسئلہ سے

چونکہ سروں  $\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \frac{1}{m^3}, \dots, \frac{1}{m^{2n-1}}, \frac{1}{m^{2n}}$  میں سے بلا لحاظ علامت سب سے بڑا سر  $\frac{1}{m}$  ہے مابقی قیمت  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots + \frac{1}{m^{2n-1}} - \frac{1}{m^{2n}} + \dots$  کے لئے

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^4} + \dots + \frac{1}{m^{2n-1}} - \frac{1}{m^{2n}} + \dots$$

یعنی  $\frac{1}{m} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^4} + \dots + \frac{1}{m^{2n-1}} - \frac{1}{m^{2n}} + \dots$  پس  $\frac{1}{m}$  یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے



$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

یہ مسئلہ دوسرے الفاظ میں اکثر اس طرح بیان کیا جاتا ہے:-

لاکی اتنی چھوٹی قیمتیں مقرر کی جاسکتی ہیں کہ ان کے اندراج سے کثیرالارقام

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔

اس بیان کی تصدیق ثبوت بالا سے ظاہر ہے کیونکہ  $1^n$  کو مقررہ مقدار خیال کیا جاسکتا ہے۔ ایک اور مفید شکل میں مسئلہ بالا اس طرح پیش کیا جاسکتا ہے:-  
جب متغیر لا کو بہت چھوٹی قیمت دی جائے تو کثیرالارقام

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n$$

کی علامت وہی ہوگی جو رقم اول  $1^n$  لاکی ہے۔  
یہ بات کثیرالارقام کو شکل

$$[1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n]$$

میں رکھنے سے بخوبی واضح ہے کیونکہ جب لا کو کافی چھوٹی قیمت دی جاتی ہے تو رقم اول  $1^n$  کی قیمت خطوط وحدانی کے اندر کی تمام دوسری رقموں کی مجموعی قیمت سے بڑی ہوتی ہے اور اس لئے جملہ کی علامت  $1^n$  کی علامت پر منحصر ہوگی۔

۴۔ متغیر کو بڑھانے سے یا گھٹانے سے کثیرالارقام کی شکل تبدیل ہوتی ہے۔

(8)

مشتق تفاضل

اب ہم اس شکل کا امتحان کریں گے جو کثیرالارقام اختیار کرتا ہے جبکہ لا کی بجائے  $h$  درج کیا جائے۔ اگر ہم  $h$  کو لازماً مثبت فرض کریں تو کثیرالارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کے اضافہ کے جواب میں ہوگی اور اُس میں اگر  $h$  کی علامت بدل دی جائے



تو کثیرالارقام کی جو شکل حاصل ہوگی وہ متغیر کو گھٹانے کے جواب میں ہوگی۔  
جب لا بدل کر لا + ہ ہو جائے تو ف (لا) بدل کر ف (لا + ہ) یعنی

$$1 + (1 + h) + \dots + (1 + h)^{n-1} + (1 + h)^n$$

ہو جائے گا۔  
فرض کرو کہ اس جملہ کی ہر رقم کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلا یا گیا ہے اور پھر جملہ کو  
ہ کی صعودی قوتوں میں ترتیب دیا گیا ہے تو ہمیں حاصل ہوگا

$$1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \dots + 1 + 1$$

$$+ [1 + (1 + h) + \dots + (1 + h)^{n-1} + (1 + h)^n]$$

$$+ \frac{h}{2 \times 1} [1 + (1 + h) + \dots + (1 + h)^{n-1} + (1 + h)^n]$$

$$+ \frac{h^2}{3 \times 2 \times 1} [1 + (1 + h) + \dots + (1 + h)^{n-1} + (1 + h)^n]$$

یہ ظاہر ہے کہ جملہ بالا کا وہ حصہ جس میں ہ شامل نہیں ہے ف (لا) ہے اور یہ کہ ہ کی  
مختلف قوتوں کے متواتر سر لا کے ایسے جملے ہیں جن کے درجے بقدر ایک کے  
گھٹتے جاتے ہیں۔ نیز یہ بھی ظاہر ہے کہ ہ کا سر جملہ ف (لا) سے حاصل  
ہو سکتا ہے اس طور پر کہ ف (لا) کی ہر رقم کو اس کی قوت سے ضرب دیا جائے  
اور اس رقم کی قوت کو بقدر ایک کے گھٹایا جائے اور رقم کی علامت برقرار رکھی  
جائے۔ ف (لا) کی تمام رقموں کے ساتھ یہی عمل کیا جائے تو ان کا مجموعہ  
ایسا کثیرالارقام ہوگا جس کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹا  
ہوا ہوگا۔

اس کثیرالارقام کو ف (لا) کا پہلا مشتق کہتے ہیں۔ عام طور پر اس کو ف (لا)

سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۹) اب ف (لا) پر بالکل اسی طرح کا عمل کرنے سے  $\frac{h^2}{2 \times 1}$  کا سر حاصل ہو سکتا ہے  
جس طرح کہ ف (لا) سے حاصل کیا گیا یا اس طرح کہ ف (لا) پر دوبار



یہ عمل کیا جائے۔ اس سرکو ف (لا) سے تعبیر کرتے ہیں اور اسکو ف (لا) کا دوسرا مشتق کہتے ہیں۔ بالکل اسی طرح کے طریق عمل سے یکے بعد دیگرے ہ کے دوسرے سرور کو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اور اس لئے ترقیم متذکرہ بالا کو استعمال کرتے سے ہم نتیجہ بالا کو شکل ذیل میں ظاہر کر سکتے ہیں:-

$$ف(لا+ھ) = ف(لا) + ھ ف(لا) + \frac{ھ^2}{2 \times 1} ف(لا) + \frac{ھ^3}{3 \times 2 \times 1} ف(لا) + ..... + ھ^n$$

یہ یاد رہے کہ چونکہ لا اور ھ کو آپس میں بدل دینے سے ف (لا+ھ) بدل نہیں جاتا اس لئے اس کے پھیلاؤ کو شکل ذیل میں بھی رکھا جاسکتا ہے۔

$$ف(لا+ھ) = ف(ھ) + لا ف(ھ) + \frac{لا^2}{2 \times 1} ف(ھ) + ..... + ھ^n$$

ہم بالعموم وہ ترقیم استعمال کریں گے جو یہاں سمجھائی گئی ہے۔ بعض اوقات مشتق تفاعیل ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)..... کو بنظر سہولت ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)..... سے بھی تعبیر کیا جائیگا۔ مثلاً ایسی صورت میں ف (لا+ھ) کے پھیلاؤ کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جائیگا۔

$$ف(لا+ھ) = ف(ھ) + ھ ف(لا) + \frac{ھ^2}{2 \times 1} ف(لا) + \frac{ھ^3}{3 \times 2 \times 1} ف(لا) + ..... + \frac{ھ^n}{n \times ..... \times 3 \times 2 \times 1} ف(لا) + ..... + ھ^n$$

## مثال

کثیرالارقام ۴ لا + ۶ لا - ۷ لا + ۴ میں لا کی بجائے لا + ھ مندرج کریں تو نتیجہ معلوم کر دو۔

یہاں

$$ف(لا) = ۴ لا^۴ + ۶ لا^۳ - ۷ لا^۲ + ۴ لا$$

$$ف(لا) = ۱۲ لا^۳ + ۱۲ لا^۲ - ۷$$

$$ف(لا) = ۴ لا^۲ + ۱۲ لا$$

$$ف(لا) = ۲۴$$



اور اس لئے نتیجہ ہوگا  $۴ لا + ۶ لا - ۷ لا + ۴ لا + ۵ (۱۲ لا + ۱۲) + \frac{۲۲}{۳} (۱۲ لا + ۱۲)$

$۲۲ + \frac{۲۲}{۳ \times ۲ \times ۱}$  - اندراج کے عمل سے اس کی تصدیق طالب علم خود کر لے۔

۷۔ لا کے ایک منطق مکمل تفاعل کا تسلسل :- اگر ایک منطق اور مکمل تفاعل

ف (لا) میں لا کی قیمت لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ ایک مقدار ۱ سے ایک دوسری بڑی مقدار ب تک بدلی جائے تو ہم ثابت کرینگے کہ ف (لا) کی قیمت بھی اس اثناء میں لا انتہا چھوٹے اضافوں کے ساتھ بدلتی جائے گی۔ یہ الفاظ دیگر ہم ثابت کریں گے کہ ف (لا) لا کے ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔

فرض کرو کہ لا ۱ سے ۱ + ۱ ہو جاتا ہے تو اس کے جواب میں ف (لا) کا اضافہ ہوگا

ف (۱ + ۱) - ف (۱)

اور یہ دفعہ ۶ کی رو سے

$$ف (۱) + \frac{۲۲}{۲ \times ۱} ف (۱) + ..... + ۱$$

کے مساوی ہے جس میں ف (۱) ف (۱) ..... محدود مقدار میں ہیں۔ اب دفعہ ۵ کے مسئلہ سے اس آخری جملہ کی قیمت کو ۱ کو کافی چھوٹا لینے سے کسی مقررہ مقدار سے کم بنایا جاسکتا ہے۔ پس ف (۱ + ۱) اور ف (۱) کا فرق اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اور یہ فرق بالآخر ۱ کے ساتھ صفر ہو جائیگا۔ ۱ سے ب تک لا کے تغیر کی تمام منزلوں میں یہ بات درست رہتی ہے اور اس لئے ف (لا) کا تسلسل ثابت ہو جاتا ہے۔

یہ مشاہدہ طالب ہے کہ ہم نے یہاں یہ ثابت نہیں کیا ہے کہ ف (۱) سے ف (ب) تک ف (لا) مسلسل بڑھتا ہے۔ ف (لا) مسلسل بڑھ سکتا ہے یا مسلسل گھٹ سکتا ہے یا چند مقامات پر بڑھتا اور باقی مقامات پر گھٹ سکتا ہے لیکن ثبوت بالا سے ظاہر ہے کہ وہ ایک قیمت سے دوسری قیمت دفعتاً یا وقت واحد میں اختیار نہیں کر سکتا اور اس لئے جب لا ۱ سے ب تک



مسلل بڑھتا ہے توف (لا) کی تمام متناظر قیمتیں ف (۱) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ ف (لا) کی علامت سے یہ معلوم ہو سکیگا کہ ف (لا) آیا بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ کیونکہ دفعہ ۵ سے یہ بات واضح ہے کہ ہر کافی چھوٹا ہو تو پورے اضافہ کی علامت رقم ف (۱) کی علامت پر منحصر ہوتی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ جب ف (۱) مثبت ہو تو ف (لا) لائے ساتھ بڑھتا ہے اور ف (۱) منفی ہو تو ف (لا) لائے کے بڑھنے سے گھٹتا ہے۔

۸۔ خارج قسمت اور باقی کی شکل جیکہ کسی کثیر الارقام کو ایک

ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے۔ فرض کرو کہ کثیر الارقام

$$۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + \dots + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱$$

کو لا۔ ۵ سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت حاصل ہوتا ہے (11)

$$۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + \dots + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱$$

اس کو ق سے اور باقی کو ر سے تعبیر کرو تو مساوات ذیل حاصل ہوگی

$$ف (لا) = (لا - ۵) ق + ر$$

اس مساوات کے یہ معنی ہیں کہ اگر ق کو لا۔ ۵ سے ضرب دیکر اس میں ر جمع کیا جائے تو نتیجہ ف (لا) کے مماثل ہونا چاہئے اور اگر ہر رقم ف (لا) کی متناظر رقم کے مماثل ہونی چاہئے اس قسم کی مساواتوں کو دوسری مساواتوں سے جو متاثرات نہیں ہوتیں ممتاز کرنے کے لئے مساوات کی معمولی علامت استعمال کرنے کی بجائے علامت بالا اختیار کرنا سہولت بخش ہوگا۔ متاثرہ کی بائیں جانب کا جملہ ہے

$$۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + \dots + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱ + ۱ \cdot ۱ - ۱ \cdot ۱$$

دونوں جانبوں کے لائے سروں کو مساوی رکھنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل



ج = ج

$$1 + \text{ب} = \text{ب}$$

$$r^j + \Delta \bar{r} = \bar{r}$$

$$m^1 + \Delta_r \bar{b} = \bar{b}$$

$$1 - u + h_{2-u} = b_{1-u}$$

$$k = b_{n-1} + a_n$$

ان مساواتوں سے خارج قسمت کے سروں ب، ب، ب، ب... کو اور باقی س کو  
یکے بعد دیگرے آسانی کے ساتھ حاصل کرنیکا طریقہ ملتا ہے۔ اس غرض کے لئے  
ہم سلسلہ اعمال کو حسب ذیل طریقہ میں لکھ سکتے ہیں۔

ب ب ب ..... ب ب ب  
ب ب ب ..... ب ب ب

پہلی سطر میں ف (۱۱) کے سر علی الترتیب لکھے گئے ہیں۔ دوسری سطر کی پہلی رقم ۱ کو  
(یا ب کو جو اس کے مساوی ہے) ھ سے ضرب دیکر حاصل کی گئی ہے اور حاصل ضرب  
ب ھ کو ۱ کے نیچے رکھ کر ایسے ۱ میں جمع کرنے سے تیسری سطر کی پہلی رقم ب  
حاصل کی گئی ہے۔ اس حاصل شدہ رقم کو ھ سے ضرب دیکر ۱ کے نیچے رکھا گیا ہے  
اور حاصل ضرب کو ۱ میں جمع کر کے تیسری سطر کی دوسری رقم حاصل کی گئی ہے۔ اس  
عمل کی تکرار سے خارج قسمت کے تمام سر کے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے اور  
اس طور پر حاصل شدہ آخری مقدار باقی کو تعبیر کرے گی۔ چند مثالوں سے اس طریقہ کی



امثل

|      |    |     |     |    |
|------|----|-----|-----|----|
| 71 - | 11 | 1 - | 5 - | 12 |
| 121  | 77 | 12  | 9   |    |

14. 26 22 2

۲۔ خارج قسمت اور باقی معلوم کرو جبکہ لا + ۵ لا + ۳ لا + ۲ کو لا۔ ۱ سے تقسیم کیا جائے۔  
جواب ق = لا + ۶ لا + ۹

11 = ✓

۳۔ ق اور س معلوم کرو جبکہ لا۔ ۲ لا + ۱ لا۔ ۱۱ لا۔ ۱۳ کو لا۔ ۵ سے تقسیم کیا جائے۔  
نوٹ۔ اگر کسی کثیر الارقام میں کوئی رقم غائب ہو تو ف (لا) کے سر لکھتے وقت اس رقم کے سر کے بجائے صفر لکھنا ہو گا مثلاً اس مثال میں پہلی سطر اس طرح لکھی جائے گی۔

13-11-26

**جواب ق** = لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> + لا<sup>۹</sup> + لا<sup>۱۰</sup> + لا<sup>۱۱</sup> + لا<sup>۱۲</sup> + لا<sup>۱۳</sup> + لا<sup>۱۴</sup> + لا<sup>۱۵</sup> + لا<sup>۱۶</sup> + لا<sup>۱۷</sup> + لا<sup>۱۸</sup> + لا<sup>۱۹</sup> + لا<sup>۲۰</sup> + لا<sup>۲۱</sup> + لا<sup>۲۲</sup> + لا<sup>۲۳</sup> + لا<sup>۲۴</sup> + لا<sup>۲۵</sup> + لا<sup>۲۶</sup> + لا<sup>۲۷</sup> + لا<sup>۲۸</sup> + لا<sup>۲۹</sup> + لا<sup>۳۰</sup> + لا<sup>۳۱</sup> + لا<sup>۳۲</sup> + لا<sup>۳۳</sup> + لا<sup>۳۴</sup> + لا<sup>۳۵</sup> + لا<sup>۳۶</sup> + لا<sup>۳۷</sup> + لا<sup>۳۸</sup> + لا<sup>۳۹</sup> + لا<sup>۴۰</sup> + لا<sup>۴۱</sup> + لا<sup>۴۲</sup> + لا<sup>۴۳</sup> + لا<sup>۴۴</sup> + لا<sup>۴۵</sup> + لا<sup>۴۶</sup> + لا<sup>۴۷</sup> + لا<sup>۴۸</sup> + لا<sup>۴۹</sup> + لا<sup>۵۰</sup> + لا<sup>۵۱</sup> + لا<sup>۵۲</sup> + لا<sup>۵۳</sup> + لا<sup>۵۴</sup> + لا<sup>۵۵</sup> + لا<sup>۵۶</sup> + لا<sup>۵۷</sup> + لا<sup>۵۸</sup> + لا<sup>۵۹</sup> + لا<sup>۶۰</sup> + لا<sup>۶۱</sup> + لا<sup>۶۲</sup> + لا<sup>۶۳</sup> + لا<sup>۶۴</sup> + لا<sup>۶۵</sup> + لا<sup>۶۶</sup> + لا<sup>۶۷</sup> + لا<sup>۶۸</sup> + لا<sup>۶۹</sup> + لا<sup>۷۰</sup> + لا<sup>۷۱</sup> + لا<sup>۷۲</sup> + لا<sup>۷۳</sup> + لا<sup>۷۴</sup> + لا<sup>۷۵</sup> + لا<sup>۷۶</sup> + لا<sup>۷۷</sup> + لا<sup>۷۸</sup> + لا<sup>۷۹</sup> + لا<sup>۸۰</sup> + لا<sup>۸۱</sup> + لا<sup>۸۲</sup> + لا<sup>۸۳</sup> + لا<sup>۸۴</sup> + لا<sup>۸۵</sup> + لا<sup>۸۶</sup> + لا<sup>۸۷</sup> + لا<sup>۸۸</sup> + لا<sup>۸۹</sup> + لا<sup>۹۰</sup> + لا<sup>۹۱</sup> + لا<sup>۹۲</sup> + لا<sup>۹۳</sup> + لا<sup>۹۴</sup> + لا<sup>۹۵</sup> + لا<sup>۹۶</sup> + لا<sup>۹۷</sup> + لا<sup>۹۸</sup> + لا<sup>۹۹</sup> + لا<sup>۱۰۰</sup>

۴۔ ق اور م معلوم کرو جبکہ لا<sup>۹</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۱۵</sup> + لا<sup>۲</sup> کو لا - ۲ سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق =  $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4 + \hat{u}_5 + \hat{u}_6 + \hat{u}_7$

$$\Delta F_A = \checkmark \quad 'P_{1A} + U_{F.O} + U_{H.F} +$$

۵۔ ق اور س معلوم کرو جبکہ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup>۔ لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> کو لا<sup>۴</sup> سے تقسیم کیا جائے۔

جواب ق = لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۲</sup> + لا - لا<sup>۰</sup> = ۲۴۲ - ۶۳ + ۱ - ۱ = ۱۷۹

تفاعلوں کی جدول - اگر کسی کثیرالارقام کے سر دئے ہوئے اعداد ہوں تو دفعہ گزشتہ کی مدد سے ہم یہ آسانی لاکی کسی قیمت کے جواب میں ف (لا) کی



قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔  
کیونکہ مساوات

۱۸  $f(لا) \equiv (لا - ۵) ق + س$   
پوری ہونی چاہیے خواہ لا کی بجائے کوئی مقدار درج کی جائے کیونکہ اس کے طرفین  
متماثل مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ لا = ۵ تو  $f(۵) = س$ ، کیونکہ لا = ۵۔ اور ق محدود ہے۔  
پس  $f(لا)$  میں لا کی بجائے ۵ درج کرنے سے ہم وہ باقی حاصل کرتے ہیں  
جو  $f(لا)$  کو لا = ۵ سے تقسیم کرنے پر ملتا ہے۔ اس باقی کو گزشتہ دفعہ کی مدد سے بہ آسانی  
معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً دفعہ ۸ کی مثال (۱) کے کثیرالارقام

$$۳ لا - ۵ لا + ۱۰ لا + ۱۱ لا - ۶۱$$

میں لا کی بجائے ۳ درج کرنے سے ۱۷ حاصل ہوتا ہے جو کثیرالارقام کو لا = ۳  
سے تقسیم کرنے کی صورت میں باقی ہے۔ طالب علم عملی طور پر ۳ درج کر کے اسکی  
تصدیق کر سکتا ہے۔

کثیرالارقام

$$لا + ۵ لا - ۱۰ لا + ۱۱ لا$$

میں لا کی بجائے ۴ درج کرنے سے ۸۵۵ حاصل ہوتا ہے جیسا کہ دفعہ ۸ کی  
مثال ۵ سے ظاہر ہے۔ ہم نے دفعہ ۷ میں یہ دیکھا ہے کہ جب لا = ۵ سے ۵۵ +  
تک بڑھتی والی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ اختیار کرتا ہے تو اس سلسلہ کے جواب میں  $f(لا)$   
بھی ایک مسلسل سلسلہ میں سے گزرتا ہے۔

اگر ہم کسی کثیرالارقام میں جس کے سرورے ہوئے اعداد پہلے لا کی بجائے یکے  
بعد دیگرے اعداد کا ایک مسلسل درج کریں مثلاً سلسلہ

$$۵ - ۴ - ۳ - ۲ - ۱ - ۰ - ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ \dots$$

کے اعداد اور ان کے جواب میں  $f(لا)$  کی قیمتوں کو محسوب کریں تو اس عمل کو ہم  
تفاعل کی جدول بنانے کا عمل کہہ سکتے ہیں۔



## امثلہ

۱۔ لا کی حسب ذیل قیمتوں

۴- ۳- ۲- ۱- ۰- ۱- ۲- ۳- ۴

کے متناظر جملہ ۲ لا + لا - ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی قیمتیں  
ف (لا) ۲۲ | ۹ | ۰ | ۵ | ۹ | ۳ | ۲ | ۱۵ | ۳۰

۲۔ لا کی انہی قیمتوں کے لئے جملہ ۱۰ لا - ۱ لا + لا + ۶ کی قیمتیں معلوم کرو۔

لا کی قیمتیں  
ف (لا) ۹۱۰ | ۴۲۰ | ۱۴۲ | ۲۲ | ۶ | ۰ | ۲۰ | ۱۲۶ | ۳۷۸

۱۔ کثیرالارقام کی ترمیمی تعمیر۔ متغیر کی تبدیلیوں کے جواب میں کثیرالارقام

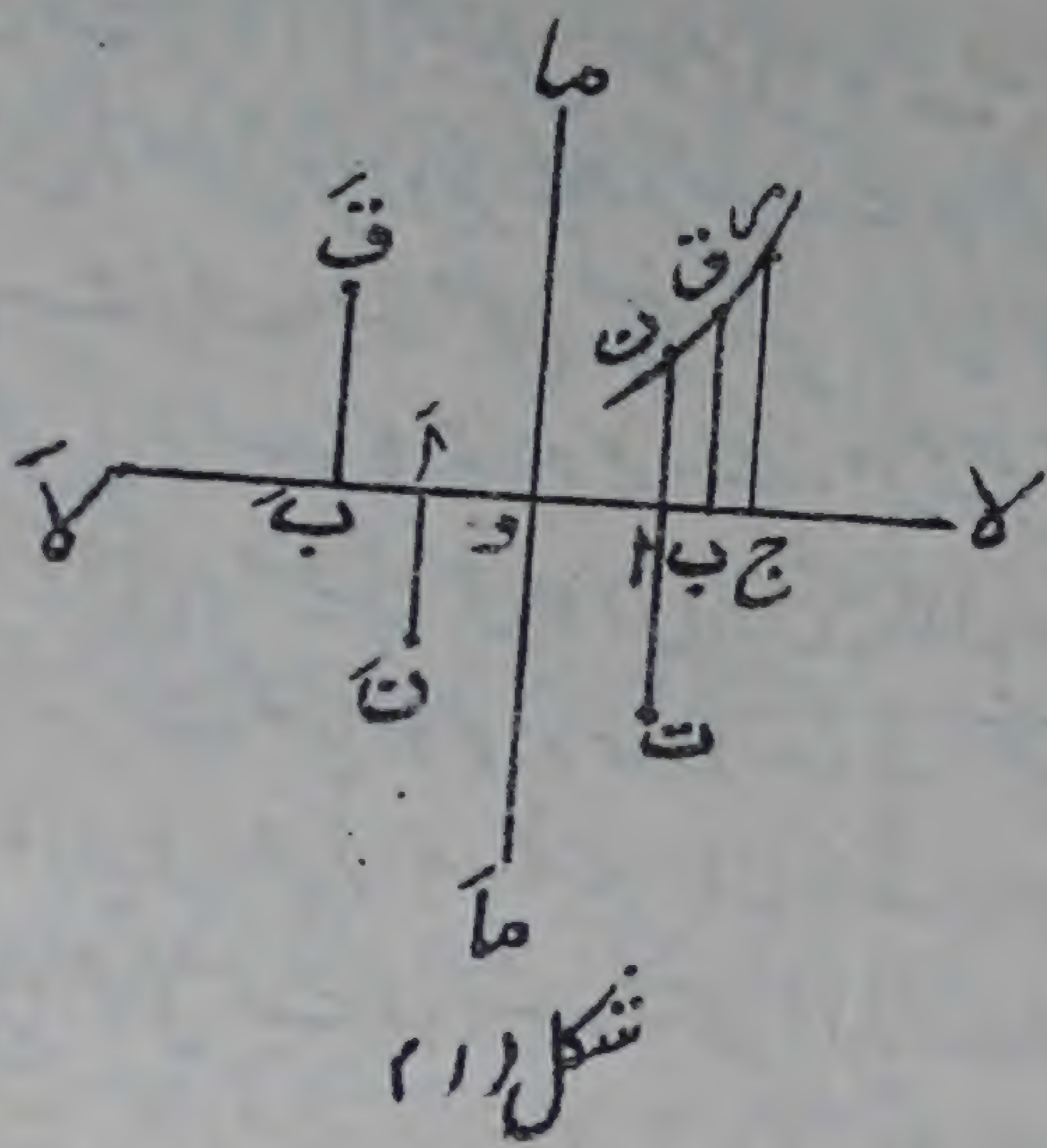
کی تبدیلیوں کی تحقیق کرنے کے لئے ظاہر ہے کہ ایک ایسا طریقہ جس سے کثیرالارقام کی مختلف قیمتوں کا مقابلہ ایک دوسرے سے بہ آسانی ہو سکے بہت مفید ہوگا۔ اس کثیرالارقام کی صورت میں جس کے سر معلومہ اعداد ہوں لا کی کسی مفروضہ قیمت کے جواب میں تفاعل کی ایک معین قیمت ہوگی۔

14

ہم ترمیمی تعمیر کے ایک طریقہ کی توضیح کریں گے جس سے لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ف (لا) کی متناظر قیمتیں نظر کے سامنے آجاتی ہیں۔

فرض کرو کہ دو خطوط مستقیم و لا اور وھا (شکل ۱۱) ایک دوسرے کو علی القواہم قطع کرتے ہیں اور دونوں سمتوں میں ان کو غیر محدود طور پر خارج کیا گیا ہے ان کو علی الترتیب محور لا اور محور وھا کہتے ہیں۔ و کے سیدھے طرف محور لا پر و سے پیمائش شدہ فاصلے مثلاً و ا و ب وغیرہ مثبت سمجھے جاتے ہیں اور و کے بائیں جانب محور لا پر کے فاصلے مثلاً و ا منفی۔ لا کے اوپر و ما کے متوازی خطوط مثلاً ا ن یا ب ق مثبت اور اس کے نیچے مثلاً ا ت یا ل ن منفی سمجھے جاتے ہیں۔ طالب علم نے علم مثلث میں ان قرار دادوں سے





شکل (۱۱)

اچھی واقفیت حاصل کی ہوگی۔

و لا پر کوئی اختیاری طول اکائی کا کام دے سکتا ہے اور کوئی مثبت یا منفی عدد اس اکائی کی رقوم میں لا لا پر تعبیر ہو سکتا ہے۔ خط و لا پر سے لے کر  $+\infty$  تک

بڑھنے والے اور خط و لا پر سے  $-\infty$  تک گھٹنے والے

اعداد تعبیر ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی عدد  $u$  سے تعبیر ہوتا ہے۔

ف (م) کی قیمت معلوم کرو۔  $u$  سے  $u$ ،  $u$  کے متوازی کھینچو ایسے کہ  $u$ ،  $u$  کی قیمت کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرے جس پر  $u$ ،  $u$  کو تعبیر کرتا ہے۔ ف (م) کی قیمت کی علامت سے یہ معلوم ہوگا کہ اس کو تعبیر کرنے والا طول لا لا کے اوپر لیا جائے یا نیچے۔ م کی مختلف قیمتوں  $u$ ،  $u$ ،  $u$ ،  $u$  وغیرہ کے جواب میں نقطوں کا ایک سلسلہ  $u$ ،  $u$ ،  $u$ ،  $u$ ،  $u$  اور اس طرح اگر ہم م کی قیمتوں کے سلسلہ کو لا انتہا بڑھائیں تاکہ  $u$  اور  $u$  کے درمیان تمام اعداد اس میں شامل ہوں تو یہ نقطے ایک مسلسل منحنی مترسم کریں گے۔

اس منحنی پر کوئی نقطے لیکر ان سے محور لا پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں سے ف (لا) کی مختلف قیمتیں نظر کے سامنے آجائیں گی۔

اس عمل کو تفاعل (ف) (لا) کی ترسیم معلوم کرنے کا عمل کہتے ہیں۔ علم ہند تحلیلی سے واقف طالب علم فوراً پہچان لے گا کہ یہ دراصل منحنی  $u = f(u)$  کی ترسیم معلوم کرنے کا عمل ہے۔

اس طریقہ کے علمی استعمال میں اس طرح شروع کرنا بہتر ہوگا کہ پہلے لا کو مثبت یا منفی چند صحیح عددوں کے مساوی لیا جائے اور ان کے جواب



میں فن (لا) کی قیمتیں معلوم کی جائیں۔ لا کی قیمتوں کو فصلہ اور فن (لا) کی تناظر قیمتوں کو معین قرار دیکر نقطے مرتسم کئے جائیں تب بالعموم یہ ممکن ہوگا کہ ہم ان نقطوں میں سے ایک ایسا منحنی کھینچ سکیں جو تفاعل کی قیمتوں پر روشنی ڈالے اور جس سے تفاعل کی نوعیت کا اندازہ ہو سکے۔ اس رسمیں تعبیر کی صحت بلاشبہ ان نقطوں کی تعداد کے ساتھ بڑھتی جی جو متغیر کی کسی دو دی ہوئی قیمتوں کے درمیان معلوم کئے گئے ہوں۔

جب کسی دو مجوزہ حدود کے اندر منحنی کے کسی حصہ کا احتیاط سے امتحان کرنا ہو تو ان حدود کے درمیان متغیر کو ایسی قیمتیں دینا اکثر ضروری ہوگا جن میں سے کسی دو متصلہ قیمتوں کا فرق اکائی سے چھوٹا ہو۔ مثلاً ذیل سے ان اصولوں کی توضیح ہوگی۔

### امثلہ

۱۔ لا + لا = ۶ کی رسم معلوم کرو۔

طول کی اکائی ود کا  $\frac{1}{4}$  لی گئی ہے (شکل ۲)۔

دفعہ ۹ کی مثال (۱۱) میں ۴ سے ۴ تک بشمول ہر دو اعداد لا کی صحیح عددی قیمتوں کے

جواب میں فن (لا) کی قیمتیں دی ہوئی ہیں۔

ان قیمتوں کی مدد سے منحنی

پر کئے گئے نقطے معلوم ہو سکتے ہیں۔

جن میں سے سات (ا، ب،

ج، د، ع، ف، گ، یہاں

مرتسم کئے گئے ہیں باقی دو نقطے

اس شکل کے حدود سے باہر واقع

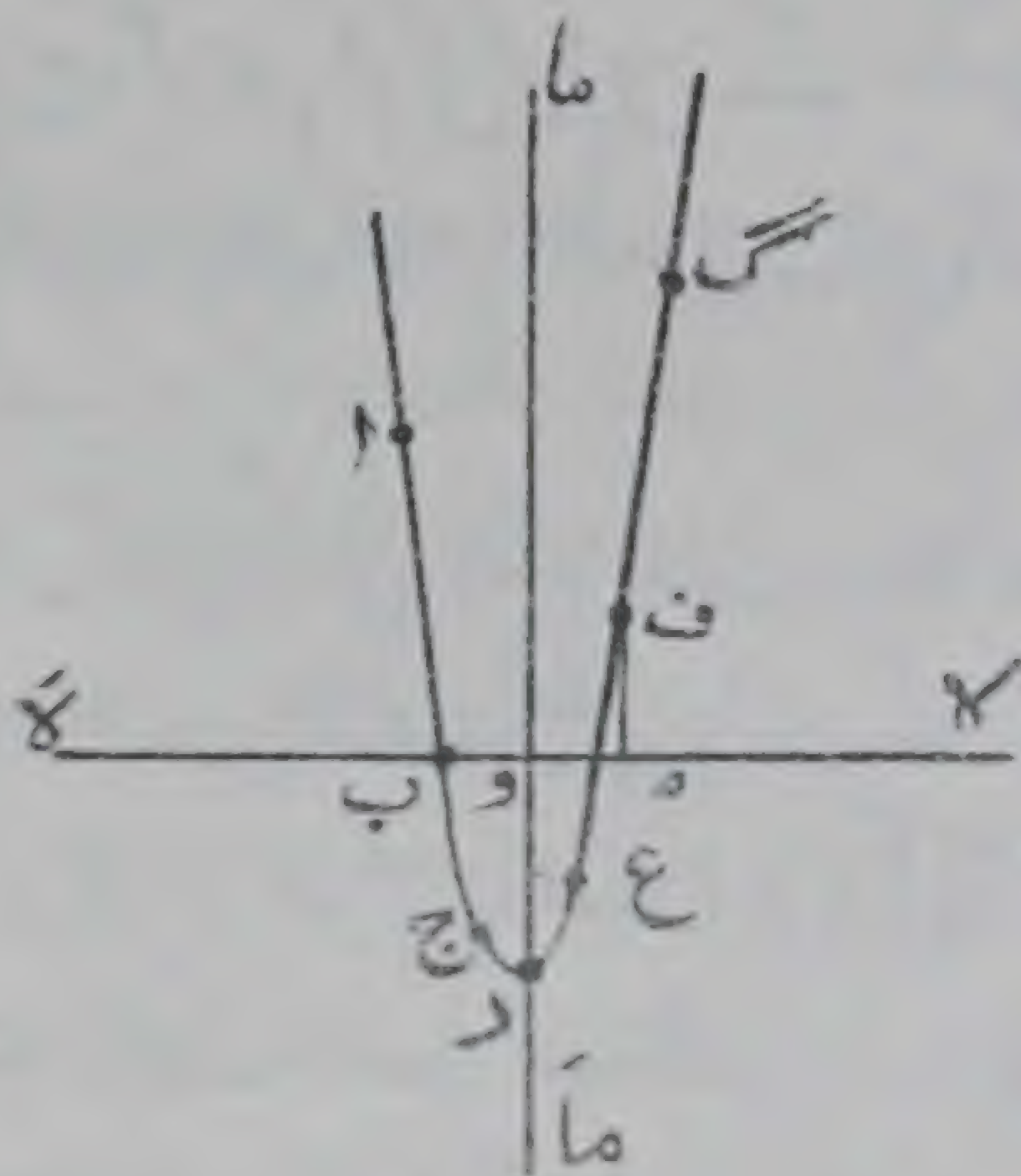
ہیں۔

ج اور ع کے درمیان منحنی کو

زیادہ صحت کے ساتھ مرتسم کرنا

طالب علم کے لئے ایک مفید مشق

ہوگی۔ یہ اس طرح ہو سکتا ہے کہ



شکل (۲)



۲- کنش الارقام

$$y + u + v = -y.$$

حاصل کر لی گئی ہے۔

ف (۱۵) = کی اصلوں کے مقامات

معلوم کرنا ہوتا ہے تو جدول کو صرف - ۲۱۷

محدود رکھا جاسکتا ہے۔

یہ ایسی صورت ہے جس میں

لاکھ صرف صحیح عدد ہی قیمتوں کے

اندراج سے منجھنی کو مرثم کرنے میں

بہت کم مدد ملتی ہے۔ اور اس لئے

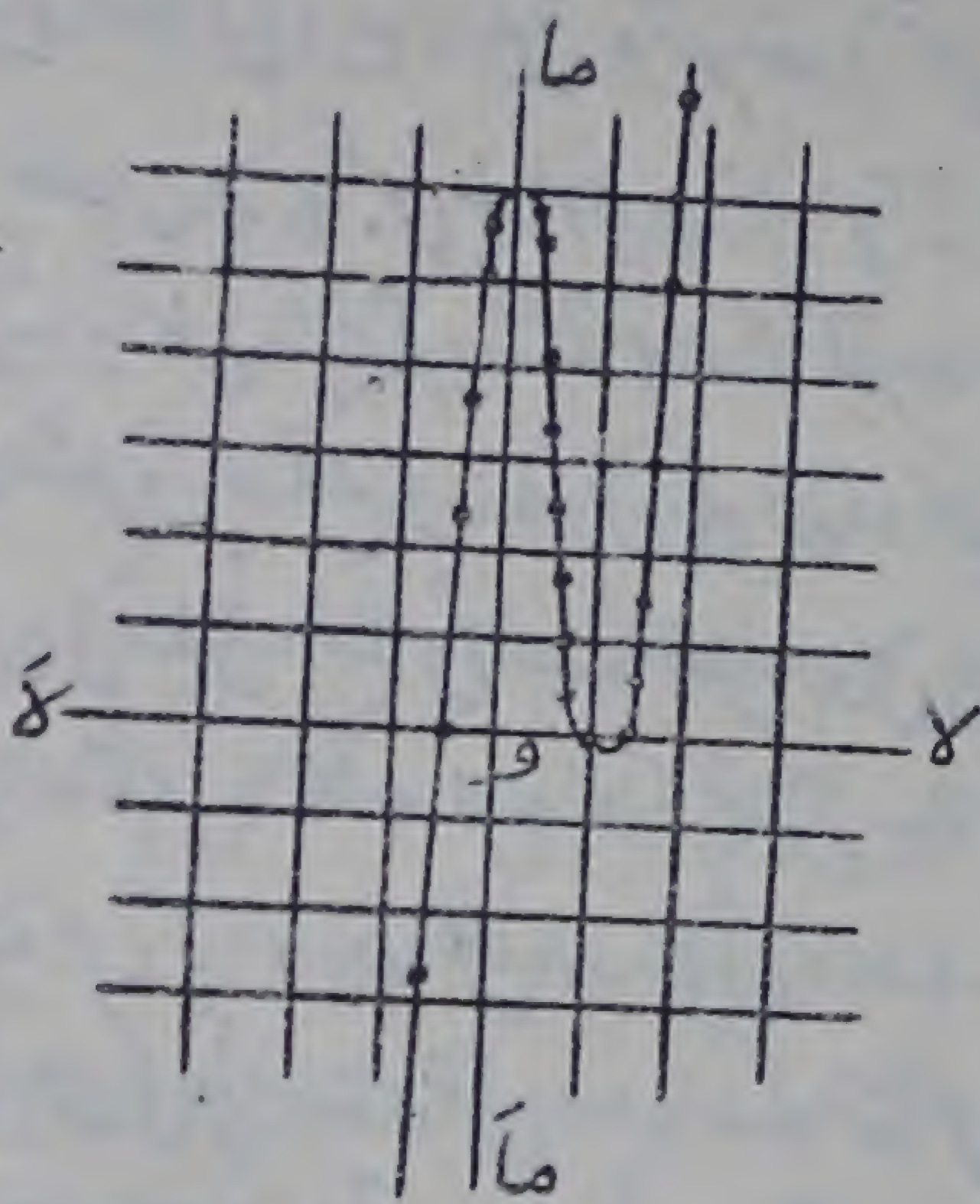
لاکو ایسی قیمتیں دینی ہونگی جن میں

لاؤ ایسی بیسیں دیں جو ی بنیں  
سے کسی دو متصل قہیتوں کا باہمی فرق بہت چھوٹا ہو۔ جدول ذیل میں ہم نے اعداد صحیح - ۱۰۰

اور ۱۶۰ اور ۳۱۱ کے درمیان ۱۲ کے وقفوں سے کام لیا ہے۔ ان قیمتوں سے معنی

یہ کے تناظر نقطہ تقریبی طور پر حاصل کئے جاسکتے ہیں اور مخنی کو مرثم کیا جاسکتا ہے۔

دیکھو شکل (۳)



شکل (۳)







خیالی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

۱۱۔ کثیرالارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ دفعات ماسبق سے یہ بات

ظاہر ہے کہ جب متغیر  $\infty$  سے  $+$  تک بدلتا ہے تو تفاعل  $f$  (لا) میں بہت سے تغیرات واقع ہو سکتے ہیں۔ یہ ہو سکتا ہے کہ وہ کسی وقفہ میں بڑھتا جائے اور پھر بڑھنا چھوڑ دے اور گھٹنا شروع کرے۔ پھر گھٹنا چھوڑ دے اور مکرر بڑھنا شروع کرے جسکے بعد ممکن ہے کہ تفاعل کچھ وقفہ تک پھر گھٹنے لگے یا مسلسل بڑھتا جائے (جیسا کہ دفعہ ماسبق کی آخری مثال سے ظاہر ہے) اس نقطہ پر جہاں تفاعل بڑھنا چھوڑتا ہے اور گھٹنا شروع کرتا ہے ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اعظم قیمت اختیار کی ہے اور جب تفاعل گھٹنا چھوڑتا ہے اور بڑھنا شروع کرتا ہے تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل نے اقل قیمت اختیار کی ہے تفاعل کی ایسی قیمتیں متعدد ہو سکتی ہیں۔ عام طور پر ان کی تعداد کثیرالارقام کے درجہ پر منحصر ہوگی۔ سوائے تریجی تعمیر کے اور کوئی چیز تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت کے وقوع کو اتنی وضاحت سے ظاہر نہیں کر سکتی، نیز ان تغیرات کو بھی جو تفاعل کی قیمتیں اختیار کرتی ہیں۔

18

دئے ہوئے کثیرالارقام کو مرسم کرتے وقت تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتوں سے واقف ہونا منحنی کو مرسم کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے کیونکہ ان سے ان نقطوں کے محل حاصل ہو گئے ہیں جہاں منحنی محور کے حوالہ سے منحنی ہے۔ کسی آئندہ باب میں ہم یہ بتائیں گے کہ ان نقطوں کا تعین ایسی مساوات کے حل پر منحصر ہوتا ہے جس کا درجہ دئے ہوئے تفاعل کے درجہ سے بقدر ایک کے کم ہو۔

یہ بتانا آسان ہے کہ اعظم اور اقل قیمتیں یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتی ہیں کیوں کہ ایک قیمت اعظم کے جواب میں متغیر کی ایک قیمت حاصل ہوگی اور دوسری قیمت اعظم کے جواب میں دوسری۔ جب متغیر اپنی پہلی قیمت سے دوسری قیمت تک بڑھتا ہے تو تفاعل گھٹنے سے ابتدا کرتا ہے اور بڑھنے پر ختم ہوتا ہے اور اس لئے ان دو اعظم قیمتوں کے درمیان کسی منزل پر ایک اقل قیمت اختیار کرتا ہے۔ اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دو اقل قیمتوں کے درمیان ایک اعظم قیمت ہونی چاہیے۔



## دوسرا باب

### مساواتوں کے عام خواص

۱۲۔ تفاعل (لا) کو مرتسم کرنے کا عمل جس کی تشریح دفعہ (۱۰) میں کی گئی ہے ایک دی ہوئی عددی مساوات کی حقیقی اصلوں کو تقریبی طور پر معلوم کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے کیونکہ جب کسی تفاعل کے جواب میں مسخنی کو صحیح طور پر مرتسم کر لیا جاتا ہے تو مساوات (لا) = کی حقیقی اصلیں مبداء سے ان نقطوں کے فاصلوں کو ناپنے سے تقریبی طور پر معلوم ہوتی ہیں جنہیں مسخنی محور کو قطع کرتا ہے۔ اس مسئلہ کا عددی حل زیادہ صحیح طور پر معلوم کرنے اور نیز عددی اور جبری دونوں قسم کی مساواتوں پر بحث کر نیکے خیال سے اس باب میں ہم مساواتوں کی اہم ترین عام خاصیتوں کو اصلوں کی تعداد ان کے وجود اور حقیقی و خیالی اصلوں کے درمیان فرق کے حوالہ سے ثابت کریں گے۔

مسئلہ ذیل کی مدد سے اکثر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ کسی مساوات میں حقیقی اصل کا وجود ہے یا نہیں۔

مسئلہ۔ اگر کسی کثیرالارقام (لا) میں مجہول مقدار لا کی بجائے دو حقیقی مقداریں (ا) اور ب درج کیجے جائیں اور اگر ان اندراجات کے نتیجے مختلف علامت ہوں یعنی ایک منفی اور دوسرا مثبت تو مساوات (لا) = کی کم از کم ایک اصل حقیقی ہوگی جس کی قیمت (ا) اور ب کے درمیان واقع ہوگی۔

ہم نے دفعہ (۷) میں یہ ثابت کیا ہے کہ تفاعل (لا) کی ایک خاصیت



اس کا تسلسل ہے۔ مسئلہ بالا تفاعل کی اس خاصیت سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ جب لا سے ب تک بدلتا ہے تو ف (لا) بھی ف (ا) سے ف (ب) تک مسلسل بدلتا ہے اور اس لئے تمام درمیانی قیمتوں کو یکے بعد دیگرے اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ ف (ا) اور ف (ب) میں سے ایک مقدار مثبت اور دوسری منفی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا اور ب کے درمیان لا کی کسی خاص قیمت کے لئے جو ف (لا) اور ف (ب) کے درمیان واقع ہے ف (لا) صفر قیمت اختیار کرتا ہے۔

20

تفاعل کی ترسیم معلوم کرنے سے طالب علم کو اس مسئلہ کے سمجھنے میں بہت مدد ملیگی یہاں جو بات ثابت کی گئی ہے اور جو شکل دیکھنے سے بالکل واضح ہو جائے گی وہ یہ ہے کہ اگر کثیر الا رقام کو تعبیر کرنے والے منحنی کے دو نقطے محور لا کی مخالف سمتوں میں ہوں یعنی ایک نقطہ محور لا کے اور دوسرا اس کے نیچے تو ان نقطوں کو ملائے والا منحنی محور کو کم از کم ایک بار قطع کرے گا۔ شکل دیکھنے سے یہ بھی معلوم ہو گا کہ لا اور ب کے درمیان مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں جن کے لئے ف (لا) = ۰ یعنی جن کے لئے منحنی محور کو قطع کرتا ہے مثلاً دفعہ (۱۰) شکل (۳) میں لا = ۲ سے تفاعل کی منفی قیمت (-۱۴۴) اور لا = ۲ سے تفاعل کی مثبت قیمت (۲۰) حاصل ہوتی ہے اور ان نقطوں کے درمیان منحنی محور لا کو تین جگہ قطع کرتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر کوئی ایسی حقیقی مقدار موجود نہ ہو جس کے اندراج سے

ف (لا) = ۰ ہو جائے تو لا کی ہر حقیقی قیمت کے لئے ف (لا) مثبت ہونا چاہیے۔

کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ (دفعہ ۴) لا = ∞ رکھنے سے ف (لا) مثبت ہو جاتا

ہے اور اس لئے لا کی کوئی قیمت اس کو منفی نہیں بنا سکتی اس وجہ سے کہ اگر اس قسم کی کوئی قیمت ہو تو اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات کی ایک حقیقی اصل موجود ہونی چاہیے اور یہ ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ ترسیمی طریقہ کے

محافظ سے اس مسئلہ کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے :- جب مساوات ف (لا) = ۰ کی کوئی اصل حقیقی نہ ہو تو ف (لا) کو تعبیر کرنے والا منحنی بالکلیہ محور لا کے



اد پر واقع ہوگا۔

۱۳۔ مسئلہ۔ طاق درجے کی ہر مساوات میں کم از کم ایک حقیقی اصل ایسی ہوتی ہے جسکی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت سے مختلف ہوگی۔

دفعہ مابین کے مسئلہ سے یہ نتیجہ فوراً اخذ ہوتا ہے۔ کثیرالارقام ف (۱۱) میں لا کی بجائے علی الترتیب -  $\infty, 0, \infty$  + مندرجہ کرو تو ن کے طاق ہونے کی وجہ سے (دیکھو دفعہ ۴) نتیجے ہونگے

لا =  $\infty$  کے لئے ف (لا) منفی

لا = ۰ کے لئے ف (لا) کی علامت وہی جو ان کی ہے

لا =  $\infty$  کے لئے ف (لا) مثبت

اگر ان مثبت ہوں تو -  $\infty$  اور ۰ کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی منفی اصل ہونی چاہیئے۔

اور اگر ان منفی ہوں تو صفر اور  $\infty$  کے درمیان مساوات کی ایک حقیقی مثبت اصل ہونی چاہیئے۔ اس طرح مسئلہ بالاثبات ہو گیا۔

۱۴۔ مسئلہ۔ جہت درجے کی ہر مساوات میں جسکی آخری رقم منفی ہو کم از کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

اس صورت میں -  $\infty, 0, \infty$  + کے اندراج سے نتیجے ہونگے

لا کی قیمت ف (لا) کی علامت

+  $\infty$  -

- ۰

+  $\infty$  +

پس -  $\infty$  اور صفر کے درمیان ایک حقیقی اصل اور صفر اور  $\infty$  کے درمیان دوسری حقیقی اصل موجود ہونی چاہیئے یعنی کم از کم ایک حقیقی منفی اصل اور ایک حقیقی مثبت اصل موجود ہونی چاہیئے۔

اس دفعہ اور دفعہ مابین دو توں میں ہم نے صرف اصلوں کا وجود ثابت کرنے پر اکتفا کی ہے اور اس مقصد کے لئے لا کی بجائے بہت بڑی مثبت یا منفی قیمتیں



درج کرنا کافی ہے جیسا کہ ہم نے کیا ہے۔ لیکن دفعہ ۴ کے مسئلہ کی مدد سے ان حدود کو تنگ کرنا فی الواقع ممکن ہے جن کے اندر مساوات کی اصلیں واقع ہوتی ہیں کسی آئندہ باب میں اصلوں کے حدود سے متعلق ایسے مسئلے دئے جائیں گے جن کی مدد سے متذکرہ حدود کو اور زیادہ تنگ کرنا ممکن ہو جائے گا۔

## ۱۵۔ عام مساوات میں ایک اصل کی موجودگی۔ خیالی اصلیں۔

ہم یہ ثابت کر چکے ہیں کہ ہر مساوات کی ایک حقیقی اصل ہوتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ مساوات جنت درجہ کی ہو جس کی آخری رقم مثبت ہو۔ ایسی مساوات کے لئے یہ ممکن ہے کہ اس کی کوئی حقیقی اصل موجود نہ ہو۔ ایسی صورت میں یہ امتحان کرنا ضروری ہے کہ آیا کوئی ایسی قیمتیں موجود ہیں جن میں خیالی اکائی شامل ہے اور جن کو لا کی بجائے درج کرنے سے کثیر الارقام صفر کے مساوی ہو جاتا ہے۔ یا یہ کہ بعض صورتوں میں متغیر کی حقیقی اور خیالی دونوں قیمتیں ہیں جو مساوات کو پورا کرتی ہیں۔ ہم ایک سادہ مثال لیتے ہیں جس سے اس بات کی توضیح ہو جائے گی کہ مساواتوں کی خیالی اصلیں بھی ہو سکتی ہیں۔ جیسا کہ ہم پہلے بیان کر چکے ہیں (دفعہ ۱۰) کثیر الارقام

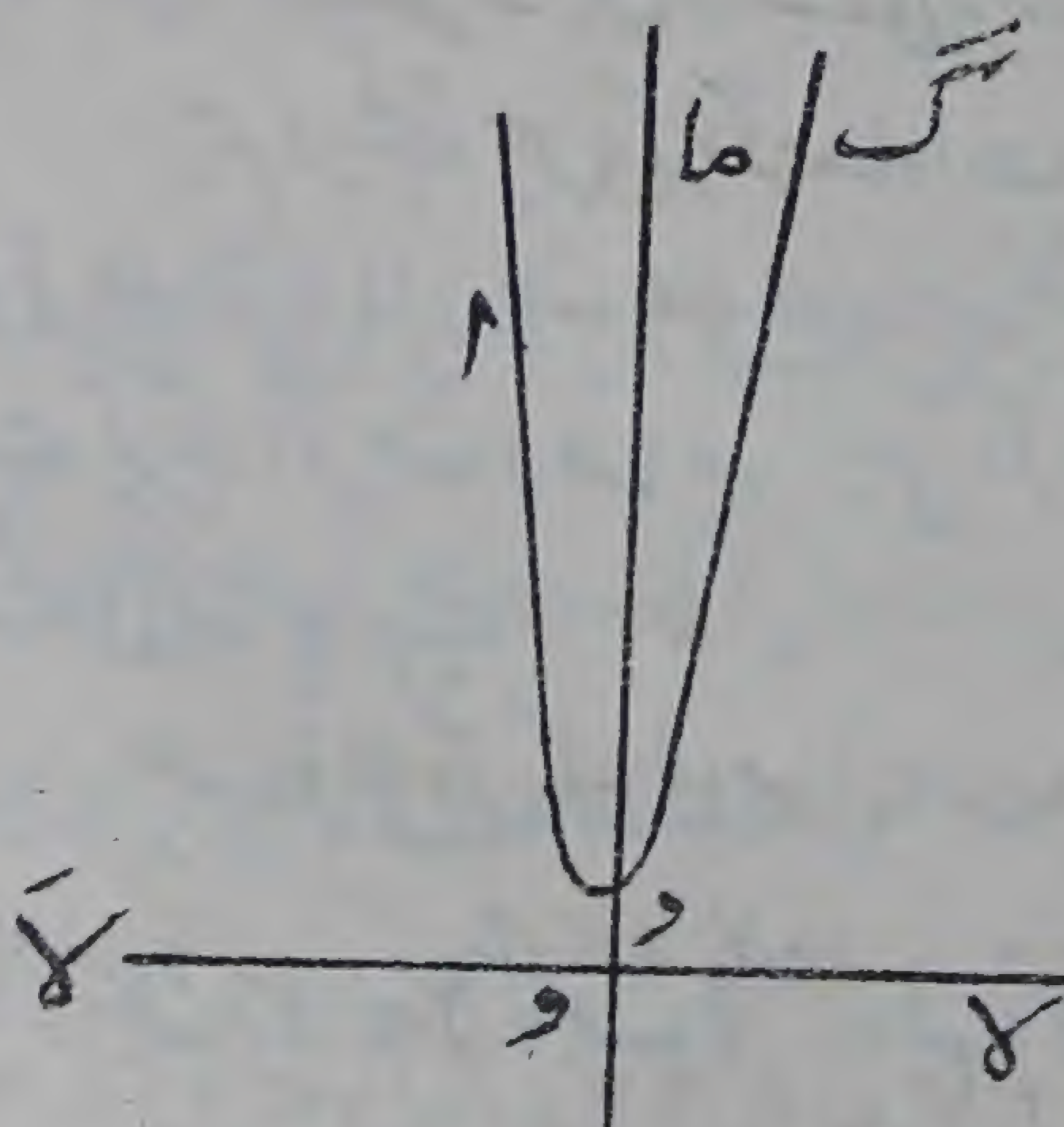
$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

کے جواب میں جو معنی ملتا ہے وہ کلاماً محور لا کے اوپر واقع ہوتا ہے (دیکھو شکل (۲)۔

مساوات  $f(x) = 0$  کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے لیکن اس کی دو خیالی اصلیں

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ اور } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

موجود ہیں جو مساوات درجہ دوم



شکل (۲)



کو حل کرنے سے ظاہر ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی قیمتوں کی عدم موجودگی میں بصورت موجودہ دو خیالی جملے ایسے ہیں جو کثیرالارقام کو صفر کے مساوی بنا دیتے ہیں۔

چنانچہ عام مسئلہ یہ ہے کہ ہر منطق مکمل مساوات میں ایک اصل شکل

$$ع + ب = ۱ - ۷$$

کی ہوتی ہے جہاں ع اور ب حقیقی محدود مقداریں ہیں۔ اس بیان میں حقیقی اور خیالی دونوں اصلیں شامل ہیں کیونکہ  $ب = ۰$  سے حقیقی اصل ملے گی۔ جب ع اور ب عدد ہوں تو جملہ  $ع + ب = ۱ - ۷$  کو ملحق عدد کہتے ہیں۔ جو کچھ ہم نے دعویٰ کیا ہے وہ یہ ہے کہ ہر عددی مساوات میں ایک حقیقی یا ملحق اصل ہوتی ہے۔ چونکہ اس مسئلہ کے ثبوت میں ایسے اصولوں سے واسطہ پڑے گا جن کو یہاں بیان کرنا خالی از وقت نہیں ہے اور جو اپنے اپنے وقت پر اس کتاب کے مختلف حصوں میں بیان ہونگے اس لئے ہم ان اصولوں کے ثابت ہونے تک اس مسئلہ کے ثبوت کو ملتوی کرتے ہیں۔ فی الحال ہم مسئلہ بالا کو تسلیم کئے لیتے ہیں اور اس سے چند نتیجے اخذ کرتے ہیں۔

۱۶۔ مسئلہ۔ ن درجے کی ہر مساوات کی ن اصلیں ہونگی اور اس سے زیادہ نہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مساوات  $ف (لا) = ۰$  کی ایک اصل کوئی مقدار  $ھ$  ہو تو  $ف (لا) = ۰$  سے پورا پورا تقسیم ہو جائے گا۔ یہ بات دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کیونکہ اگر  $ف (ھ) = ۰$  یعنی اگر  $ف (لا) = ۰$  کی اصل  $ھ$  ہو تو  $ھ$  کو صفر کے مساوی ہونا چاہیئے۔

اب فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے

$$ف (لا) = لا + ب لا^۱ + ب لا^۲ + \dots + ب لا^n + ب ن = ۰$$

اس مساوات کی ایک حقیقی یا خیالی اصل ہونی چاہیئے (دفعہ ۱۵) جسکو ہم علامت ع سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ  $ف (لا) = ۰$  ع سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت



ف (لا) حاصل ہوتا ہے۔ تو ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی  
 ف (لا) = (لا - عم) ف (لا)  
 پھر مساوات ف (لا) = (لا - عم) درجہ کی ایک مساوات ہے اس کی بھی ایک  
 اصل ہونی چاہیے جسکو ہم عم سے تعبیر کریں گے۔  
 فرض کرو کہ ف (لا) کو لا - عم سے تقسیم کرنے پر خارج قسمت ف (لا) ہے

تو

$$ف (لا) = (لا - عم) ف (لا)$$

$$اور \quad ف (لا) = (لا - عم) (لا - عم) ف (لا)$$

جہاں ف (لا) ن - ۲ درجہ کا جملہ ہے۔

اس عمل کو جاری رکھ کر ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ف (لا) ن اجزائے ضربی  
 اور ایک عددی جزو ضربی ف (لا) کا حاصل ضرب ہے قبل الذکر اجزائے ضربی میں  
 سے ہر ایک میں لا کی صرف پہلی قوت ہی داخل ہوتی ہے۔ اب لا کے سروں کا مقابلہ  
 کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ ف (لا) = ۱ - اس لئے مساوات متماثلہ

$$ف (لا) = (لا - عم) (لا - عم) \dots (لا - عم) (لا - عم)$$

حاصل ہوتی ہے۔

اب یہ ظاہر ہے کہ اس مساوات کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے

مقداروں عم، عم، عم، ..... عم میں سے کوئی ایک درج کی جائے تو یہ رکن

صفر کے مساوی ہوتا ہے اور اس لئے ف (لا) بھی صفر کے مساوی ہو گا۔ یعنی

مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں یہ مقداریں عم، عم، عم، ..... عم ہیں۔

ان اصلوں کے علاوہ کوئی اور اصلیں نہیں ہو سکتیں کیونکہ عم، عم، عم، ..... عم

کے علاوہ کوئی اور مقدار مساوات یا لا کے بائیں جانبی رکن میں لا کی بجائے درج کی جائے

تو اس رکن کا کوئی جزو ضربی صفر نہیں ہوتا اور اس لئے حاصل ضرب صفر کے مساوی



نہیں ہو سکتا۔

نتیجہ صریح۔ لائن ن دیں درجہ کے دو کثیرالارقام لا کی ن قیمتوں سے زیادہ کے لئے ایک دوسرے کے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کہ جب دونوں متماثل مساوی ہوں۔ کیونکہ اگر ان کے فرق کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ہمیں ن دین درجہ کی مساوات ملے گی جو صرف لا کی ن قیمتوں سے پوری ہو سکتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ہر سر علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہو۔

اگرچہ کہ اس دفعہ کے مسئلہ سے مساوات (۱۱) = کو حل کرنے میں کوئی مدد نہیں ملتی لیکن اس کی مدد سے اس کے عکس کو ہم پوری طرح حل کر سکتے ہیں یعنی جب مساوات کی اصلیں دی گئی ہوں تو مساوات معلوم ہو سکتی ہے۔ دی ہوئی اصلوں میں سے ہر ایک کو لائن سے تفریق کرو۔ تو جتنی اصلیں ہیں اتنے ثنائی جملے حاصل ہونگے۔ ان ثنائی جملوں کو باہم ضرب دو تو مطلوبہ مساوات حاصل ہو جائے گی۔ اس مسئلہ کا ایک اور قاعدہ یہ ہے کہ جب دی ہوئی مساوات کی ایک یا ایک سے زیادہ اصلیں دی گئی ہوں تو ایسی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جسکی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔ اس غرض کے لئے ہمیں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دئے ہوئے ثنائی اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے دی ہوئی مساوات کو تقسیم کر دیا جائے، خارج قسمت مطلوبہ کثیرالارقام ہوگا جو باقی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوگا۔

### امثلہ

۱۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں ہیں

$$-۳ - ۱ - ۲ - ۵$$

جواب :- لا - ۵ لا - ۱۳ لا + ۵۳ لا + ۶۰ = ۰

۲۔ مساوات

$$-۶ لا + ۸ لا - ۱۷ لا + ۱۰ = ۰$$

کی ایک اصل ۵ ہے۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں باقی نامعلوم اصلیں ہوں۔  
دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ استعمال کرو۔



جواب :-  $\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$

۳۔ مساوات

$$\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۱۰۵ + \bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۱۰۵$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب :- باقی دو اصلیں ۳، ۴ ہیں۔

۴۔ ایک مساوات کی اصلیں

$$- \frac{۳}{۲}، ۳، \frac{۱}{۲}$$

ہیں۔ اس مساوات کو معلوم کرو۔

$$\text{جواب :- } \bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۹ + \bar{ا} - \bar{ا} = ۹$$

۵۔ کبھی مساوات

$$\bar{ا} - \bar{ا} = ۱$$

کو حل کرو۔

یہاں یہ ظاہر ہے کہ  $\bar{ا} = ۱$ ، مساوات کو پورا کرتا ہے۔  $\bar{ا} - \bar{ا} = ۱$  سے تقسیم کر کے خارج قسمت

کو حل کرو تو باقی دو اصلیں ہونگی

$$- \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = \bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا}$$

۶۔ ایک مساوات کی ایک غیر منطقی اصل ہے

$$\bar{ا} + \bar{ا}$$

ہے۔ اس مساوات کو معلوم کرو اس طرح کہ اس کے سر منطقی ہوں۔

25

جذری علامتوں کے مختلف اجتماعوں کی بموجب اس جگہ کی چار مختلف قیمتیں ہونگی یعنی

$$\bar{ا} + \bar{ا}، \bar{ا} - \bar{ا}، \bar{ا} + \bar{ا}، \bar{ا} - \bar{ا}$$

اس لئے مطلوبہ مساوات ہے

$$(\bar{ا} - \bar{ا}) (\bar{ا} + \bar{ا}) (\bar{ا} - \bar{ا}) (\bar{ا} + \bar{ا}) = ۰$$

$$یا (\bar{ا} - \bar{ا}) (\bar{ا} + \bar{ا}) (\bar{ا} - \bar{ا}) (\bar{ا} + \bar{ا}) = ۰$$

یا بالآخر

$$\bar{ا} - \bar{ا} + \bar{ا} - \bar{ا} = ۰$$



۷۔ مساوی اصلیں۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کثیر الارقامت (لا) کے ن اجزائے ضربی میں سے سب کا ایک دوسرے سے مختلف ہونا ضروری نہیں ہے مثلاً جزو ضربی لا۔ عہ کی دوسری قوت یا اس سے بڑی قوت بشرطیکہ یہ ن سے متجاوز نہ ہو داخل ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں بھی ہم یہ کہتے ہیں کہ مساوات (لا) =۔ کی ن اصلیں ہیں جن میں سے دو یا زیادہ ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔ اصل عہ کو مساوات کی ضعیفی اصل کہتے ہیں یعنی دوہری تہری وغیرہ بموجب اس تعداد کے جتنے بار جزو ضربی تکرار پاتا ہے۔

وقفہ (۱۰) شکل (۳) کی ترسیم دیکھنے سے ضعیفی اصلوں کا واقع ہوتا سمجھ میں آجائے گا اس شکل کا معائنہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات  $۱۰ - ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ = ۶$  کی دو مثبت اصلیں تقریباً مساوی ہیں اور ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ اس کثیر الارقام کی مطلق رقم میں ایک چھوٹا عدد جمع کیا گیا ہے جس کے معنی یہ ہیں کہ پورے منحنی کو چھوٹے فاصلہ میں اوپر وار متوازن حرکت دی گئی ہے تو اس کا اثر یہ ہو گا کہ اصلیں جو ابتدا میں تقریباً مساوی تھیں اب بالکل مساوی ہو جائیں گی۔ ایسی صورت میں خط و کلا منحنی کو دو متماثل نقطوں پر قطع نہیں کرے گا بلکہ اُس کو مس کرے گا۔ جب کوئی خط منحنی کو مس کرتا ہے تو ہم کہنا مناسب ہے کہ خط منحنی کو ایک نقطہ پر نہیں بلکہ دو منطق نقطوں پر ملتا ہے۔ وہ طالب علم جو مستوی منحنیوں کے نظریہ سے واقف ہے بلا تکلف اسی طرح تہری یا اس سے زیادہ ضعیفی اصل کے واقع ہونے کی تشریح مثالوں سے کر سکتا ہے۔

مساوی اصلیں، حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان ملائے والی کڑی کا کام کرتی ہیں۔

ہم نے ابھی دیکھا ہے کہ دو حقیقی اصلیں رکھنے والا کثیر الارقام ذرا سی تبدیلی سے ایسی شکل میں بدلتا ہے جس میں دو حقیقی اصلیں مساوی ہو جاتی ہیں۔ اگر اور ذرا سی تبدیلی کر دی جائے تو ہم کثیر الارقام کو ایسی شکل میں بدل سکتے ہیں جس میں یہ دو اصلیں خیالی ہو جائیں۔



فرض کرو کہ اس کثیرالارقام کی مطلق رقم میں ایک اور چھوٹا عدد اضافہ کرنے سے اس کو مکرر بدلا گیا ہے تو ہمیں اس کی ایسی ترسیم ملے گی جس میں محور و لا منحنی کو صرف ایک حقیقی نقطہ پر قطع کریگا یعنی اس نقطہ پر جو منفی اصل کے جواب میں ہے۔ وہ دو نقطے جو مثبت اصلوں کے جواب میں تھے اب غائب ہو جائیں گے۔

مثلاً کثیرالارقام  $10x^3 - 12x^2 + 28x - 28$  پر غور کرو جو دفعہ ۱۰ مثال (۱۲) کے کثیرالارقام میں ۲۲ جمع کرنے سے حاصل کیا گیا ہے اسکی ترسیم کو یا آسانی کھینچا جاسکتا ہے شکل ۳ کے نقطہ ۱ کے جواب میں اب ایک ایسا نقطہ حاصل ہوگا جو محور لا کے بہت اوپر واقع ہوگا۔ لا + ۱ سے تقسیم کرو اور سہ رشتہ جملہ (Trinomial) تین رقموں والا جملہ  $10x^3 - 12x^2 + 28x - 28$  حاصل کرو جس میں بقیہ دو اصلیں موجود ہوں گی۔ یہ دو اصلیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں اور وہ ہیں

$$x = \frac{3917}{20} - \frac{24}{20}, \quad x = \frac{3917}{20} + \frac{24}{20}$$

ہم یہاں دیکھتے ہیں کہ جب کثیرالارقام کی شکل بدلی جاتی ہے اس غرض سے کہ ایک اصل غائب ہو جائے تو اس کے ساتھ ایک دوسری اصل بھی غائب ہو جاتی ہے اور ان کی جگہ خیالی اصلوں کا ایک زوج لیٹا ہے۔ اس کا سبب آئندہ دفعہ کے مسئلہ سے واضح ہوگا۔

۱۸۔ مساواتوں میں خیالی اصلیں زوج زوج داخل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ثابت شدنی کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے  
اگر مساوات  $(x^2 - 2ax + b)$  کی ایک اصل، خیالی جملہ  $x^2 - 2ax + b$  ہو اور مساوات کے تمام حقیقی مقداریں ہوں تو اس کی ایک اور اصل مزدوج خیالی جملہ  $x^2 - 2ax + b$  بھی ہونی چاہیئے۔

مساوات ذیل متماثل ہے

$$(x^2 - 2ax + b)(x^2 - 2ax + b) = (x^2 - 2ax + b)^2$$



فرض کرو کہ کثیر رقمی  $F$  (لا) کو اس متانہ کے بائیں رکن سے تقسیم کیا گیا ہے اور اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ باقی سا لا + سا ہے تو مساوات متانہ ملے گی

$$F(لا) = (لا - ع) + ۲ + ۱ ق + سا لا + سا$$

جہاں ق، (ن-۲) درجہ خارج قسمت ہے۔ اس مساوات متانہ میں لا کی بجائے ع + ۱ - ۱ - ۱ درجہ کرو تو بوجہ فرض  $F(لا)$  صفر ہوگا لیکن اس سے (لا - ع) + ۲ + ۱ بھی صفر ہوتا ہے۔ اس لئے

$$سا (ع + ۱ - ۱ - ۱) + سا = ۰$$

جس سے ہیں دو مساواتیں

$$سا ع + سا = ۰، سا ۱ = ۰$$

ملتی ہیں کیونکہ حقیقی و خیالی حصے ایک دوسرے کو صفر نہیں بنا سکتے اور اس لئے ان کو علیحدہ علیحدہ صفر کے مساوی ہونا چاہیے۔ پس

$$سا = ۰، سا = ۰$$

اس طرح باقی سا لا + سا صفر ہو جاتا ہے اور اس لئے  $F(لا)$  دو اجزائے ضربی

$$لا - ع - ۱ - ۱، لا - ع + ۱ - ۱ - ۱$$

کے حاصل ضرب سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اصل ع + ۱ - ۱ - ۱ کے ساتھ ع - ۱ - ۱ کو بھی اصل ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ حقیقی سرور والی کسی مساوات میں خیالی اصلوں کی تعداد ہمیشہ جفت ہوتی ہے اور ہر کثیر رقمی کو حقیقی اجزائے ضربی سے ترکیب یافتہ خیال کیا جاسکتا ہے جس میں خیالی اصلوں کے ہر زوج سے ایک حقیقی دو درجہ جزو ضربی اور ہر حقیقی اصل سے ایک مفرد حقیقی جزو ضربی پیدا ہوتا ہے۔ کثیر رقمی کو ایسے اجزائے ضربی میں عملاً تجزیل کر دینا مساوات کو پوری طرح حل کرنا ہے۔

ہم نے دفعہ ۱ میں یہ بیان کیا تھا کہ مساوی اصلوں کو حقیقی اور خیالی



اصلوں کے درمیان ملا نیوالی کر ڈھی خیال کیا جاسکتا ہے اس بیان کو اب دوسرے  
نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کثیر مرتبی کا ایک دو درجہ جزو ضربی  
(لا۔ عہ)  $+ ۲$  ک سے اور فرض کرو کہ ک کی قیمت میں چھوٹی تبدیلیوں کے ذریعہ  
کثیر مرتبی کی شکل تبدیل کی گئی ہے۔ جب ک منفی ہوتا ہے تو اس دو درجہ جزو ضربی سے  
حقیقی اصلوں کا ایک زوج حاصل ہوتا ہے۔ جب ک  $= ۰$  تو اس جزو ضربی سے  
دو مساوی اصلیں عہ حاصل ہوتی ہیں اور جب ک مثبت ہو تو دو خیالی  
اصلیں ملتی ہیں۔

بالکل ایسے ہی ثبوت سے جیسے اوپر دیا گیا ہے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ شکل  
عہ  $\pm$  ماحجہ کی اہم اصلیں مساواتوں میں زوج زوج داخل ہوتی ہیں جبکہ مساواتوں کے منطبق ہوں۔

## مثالیں

۱۔ وہ منطبق کبھی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$۱ - \sqrt{۲} + ۳$$

جواب: لا۔ عہ  $+ ۱۹ - ۱۳ = ۰$

۲۔ وہ منطبق مساوات بناؤ جس کی دو اصلیں ہیں

$$۱ + \sqrt{۵} - ۵ - \sqrt{۱}$$

جواب: لا۔ عہ  $+ ۱۲ - ۲۷ + ۱۳ - ۹ = ۰$

۳۔ مساوات

$$۲ - \sqrt{۲} - ۵ + \sqrt{۱} + ۲ = ۰$$

کی ایک اصل

$$۳ - \sqrt{۲} + ۲$$

جواب: لا۔ عہ  $+ ۱ - ۳ + ۱ - \sqrt{۱}$

چھوٹی اصلیں معلوم کرو۔

۴۔ مساوات

$$۳ - \sqrt{۲} - ۳ + \sqrt{۱} + ۱ = ۰$$



کی ایک اصل  $2 + 1 = 3$  ہے۔ اس مساوات کو حل کرو۔

جواب:  $2 \pm 1 = 3$ ۔

۱۹۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔ مثبت اصلیں۔ اس قانون

کو استعمال کر کے کسی دی ہوئی مساوات کا صرف معائنہ کرنے سے ہم اس کی مثبت اصلوں کی تعداد کے لئے ایک علوی حد مقرر کر سکتے ہیں۔ اس قانون کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

مساوات کی سب رتوں کو دائیں جانب منتقل کر کے بائیں جانب صفر رکھا جائے تو اس کے پہلے رکن کی رتوں میں  $+$  سے  $-$  اور  $-$  سے  $+$  علامت کی جتنی تبدیلیاں ہوں گی ان سے زیادہ مساوات کی مثبت اصلیں نہیں ہو سکتیں۔

ہم فی الحال صرف ایسے ثبوت پر اکتفا کریں گے جو عموماً دیا جاتا ہے۔ یہ ثبوت ڈیکارٹ کے اس مشہور مسئلہ کا عام ثبوت نہیں کہلایا جاسکتا بلکہ اس کو اس مسئلہ کی صرف تصدیق کہنا زیادہ بہتر ہوگا۔ آئندہ ہم یہ دکھائیں گے کہ متذکرہ بالا قانون اور دیگر مشابہ قوانین جو متقدمین نے مساواتوں کی مثبت، منفی اور خیالی اصلوں کی تعداد سے متعلق دریافت کئے ہیں دراصل بودن (Budan) اور فوریر (Fourier) کے عام مسئلوں سے فوری نتیجوں کے طور پر اخذ ہوئے ہیں۔

فرض کر دو کہ کسی کثیر رتبی کی علامتیں یکے بعد دیگرے ترتیب ذیل میں پیش ہوتی ہیں

$++ - - + - + +$

اس میں علامت کی تبدیلیاں کل سات ہیں جس میں  $+$  سے  $-$  اور  $-$  سے  $+$  دونوں قسم کی تبدیلیاں شامل ہیں۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ اگر اس کثیر رتبی کو ایک ثنائی جملہ سے ضرب دیا جائے جس کی علامتیں ایک مثبت اصل کے جواب میں  $++ - -$  ہیں تو حاصل کثیر رتبی میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ابستدائی کثیر رتبی کے بہ نسبت کم از کم بقدر ایک کے زیادہ ہوگی۔



ہم صرف علامتوں کو لکھتے ہیں جو عمل ضرب میں واقع ہوتی ہیں۔ اس طرح

$$\begin{array}{cccccccccccc} - & + & - & + & + & - & - & - & + & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & + & + & - & + & - & - \\ \hline + & - & + & - & + & + & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

یہاں تیسری سطر میں جہاں کہیں دو مختلف علامت رقوموں کو جمع کرنا ہے وہاں ہم علامت رکھی گئی ہے۔ اس صورت میں ہم دیکھتے ہیں (اور کسی دوسری ترتیب میں بھی یہی بات پیدا ہوگی) کہ عمل ضرب کا اثر یہ ہوتا ہے کہ مبہم علامت ایسی جگہ داخل ہوتی ہے جہاں ابتدائی کثیر رتبی میں + کے بعد + یا - کے بعد - علامت آتی ہے۔ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد ہرگز نہیں گھٹتی۔ لیکن ہمیشہ ایک تبدیلی آخر میں ضرور پیدا ہوتی ہے۔ اوپر کی مثال میں جہاں ابتدائی کثیر رتبی علامت کی ایک تبدیلی پر ختم ہوتا ہے یہ نتیجہ ظاہر ہے۔ اگر کثیر رتبی ایک ہی علامت کی تکرار پر ختم ہو تو بھی یہ معلوم ہوگا کہ حاصل کثیر رتبی میں اس کے متناظر ابہام سے علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہوگا۔ یہ تبدیلی پچھلی علامت کے ساتھ ہوگی یا جمع شدہ زائد علامت کے ساتھ۔ پس ایسی نادور الوقوع صورت میں بھی جس میں ابتدائی کثیر رتبی میں علامت کی تکراروں سے حاصل کثیر رتبی میں علامت کی تکراریں باقی رہتی ہیں ایک تبدیلی جمع ہوتی ہے۔ پس ہم اب یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ کثیر رتبی کو ثنائی جملہ لا - ع سے ضرب دیا جائے تو کم از کم علامت کی ایک زائد تبدیلی داخل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ کثیر رتبی ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب سے بنا ہے جو منفی اور خیالی اصلوں کے جواب میں ہیں مثبت اصلوں ع، ج، د وغیرہ کے متناظر اجزائے ضربی لا - ع، لا - ج، لا - د وغیرہ میں سے ہر ایک سے اس کثیر رتبی کو ضرب دینے کا اثر یہ ہوگا کہ ہر ایک جزو ضربی کے جواب میں علامت کی کم سے کم ایک تبدیلی داخل ہوگی۔ اس طرح جب تمام اصلوں کے جواب میں مکمل حاصل ضرب ملجاتا ہے تو ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ حاصل کثیر رتبی میں



علامت کی کم از کم اتنی تبدیلیاں موجود ہیں جتنی کہ اس کی مثبت اصلیں ہیں۔ یہی ڈیکارٹ کا مسئلہ ہے۔

۲۰۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔ منفی اصلیں۔ منفی اصولوں

کی صورت میں ڈیکارٹ کا قانون بیان کرنے سے پیشتر ہم ثابت کریں گے کہ اگر مساوات  $f(x) = 0$  میں  $x$  کی بجائے  $-x$  لائیں تو حاصل مساوات کی اصلیں وہی ہوں گی جو ابتدائی مساوات کی ہیں سوائے اس کے کہ ان کی علامتیں بدلائیں گی۔ دفعہ ۱۶ کی مساوات متانکہ

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) \dots (x-n)$

سے یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کیونکہ اس مساوات سے ہم اخذ کرتے ہیں

$f(-x) = (-x-a)(-x-b)(-x-c) \dots (-x-n)$

اس سے ظاہر ہے کہ  $f(-x) = 0$  کی اصلیں ہیں

$-a, -b, -c, \dots, -n$

پس  $f(x)$  کی منفی اصلیں  $f(-x)$  کی مثبت اصلیں ہوں گی اور ہم منفی اصولوں کے لئے ڈیکارٹ کا قانون اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔  
مساوات  $f(x) = 0$  کی منفی اصلوں کی تعداد کثیر رقتی  $f(-x)$  کی رتبوں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔

۲۱۔ خیالی اصولوں کے وجود کو ثابت کرنے میں ڈیکارٹ کے

قانون کا استعمال

ڈیکارٹ کے قانون کے استعمال سے مساواتوں میں خیالی اصولوں کے وجود کا پتہ لگانا اکثر ممکن ہو گا۔ کیونکہ اگر کسی مساوات کی مثبت اصلوں کی بڑی



سے بڑی ممکن تعداد اور منفی اصلوں کی بڑی سے بڑی ممکن تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ سے کم ہو تو خیالی اصلیں یقیناً موجود ہونگی۔ مثال کے طور پر مساوات

$$x^4 + 10x^3 + 3x^2 - 3 = 0$$

لو۔ اس مساوات میں چونکہ علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس وجہ سے ایک سے زیادہ مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔ اب لا کو۔ لا میں بدلنے سے حاصل ہوگا

$$x^4 - 10x^3 - 3x^2 - 3 = 0$$

اب چونکہ اس میں علامت کی صرف ایک تبدیلی ہے اس لئے منفی اصلوں کی تعداد ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ اس طرح مجوزہ مساوات میں دو سے زیادہ حقیقی

اصلیں موجود نہیں ہو سکتیں۔ اس لئے کم سے کم چھ خیالی اصلیں موجود ہونی چاہئیں۔

ڈیکارٹ کے قانون کا یہ استعمال صرف غیر مکمل مساواتوں کی صورت میں مفید ہے کیونکہ جب مساوات مکمل ہو تو یہ آسانی یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کا مجموعہ مساوات کے درجہ کے بالکل مساوی ہوتا ہے۔

۲۲۔ مسئلہ۔ اگر کثیر رشتہ ف (لا) میں لا کی بجائے دو عدد لا اور ب مندرج کرنے سے نتیجے مختلف علامت حاصل ہوں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی طاق تعداد ان عددوں کے درمیان واقع ہوگی۔ لیکن اگر نتیجے ہم علامت ہوں تو ان عددوں کے درمیان یا تو کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوگی یا حقیقی اصلوں کی جفت تعداد واقع ہوگی۔

اس مسئلہ میں ان نتیجوں کی عام سے عام صورت شامل ہے جو کسی مساوات کے پہلے رکن کی علامتوں سے مساوات کی اصلوں کے متعلق اخذ کئے جاسکتے ہیں جبکہ لا کی بجائے دو دئے ہوئے عدد مندرج کئے جائیں، چنانچہ دفعہ ۱۲ کا مسئلہ اس کی ایک خاص صورت ہے۔ ہم اس مسئلہ کا پہلا حصہ ثابت کریں گے۔ دوسرے حصہ کو بالکل اسی طریقہ پر ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مقدار لا اور ب کے درمیان مساوات ف (لا) = ۰ کی م اصلیں عم، عم، عم، عم، عم واقع ہوتی ہیں اور ان کے علاوہ کوئی اور اصلیں واقع نہیں ہوتیں۔ فرض کرو کہ لا چھوٹا ہے ب سے



فرض کرو کہ جب  $f$  (لا) کو  $m$  اجزائے ضربی کے حاصل ضرب  $(لا - عم)$   $(لا - عم) \dots (لا - عم)$  سے تقسیم کیا جاتا ہے تو خارج قسمت  $f$  (لا) حاصل ہوتا ہے۔ تو مساوات مثلاً  $لیلی$

$$f(لا) = (لا - عم)(لا - عم) \dots (لا - عم) f(لا)$$

اس میں یکے بعد دیگرے  $لا = لا$ ،  $ب = ب$  رکھنے سے حاصل ہوگا

$$f(لا) = (لا - عم)(لا - عم) \dots (لا - عم) f(لا)$$

$$f(ب) = (ب - عم)(ب - عم) \dots (ب - عم) f(ب)$$

اب  $f(لا)$  اور  $f(ب)$  ہم علامت ہیں، کیونکہ اگر ان کی علامتیں مختلف ہوتیں تو دفعہ ۱۲ کی رو سے ان کے درمیان مساوات  $f(لا) =$  کی کم سے کم ایک اصل ہوتی۔ بموجب فرض  $f(لا)$  اور  $f(ب)$  کی علامتیں مختلف ہیں اس لئے حاصل ضربوں

$$(لا - عم)(لا - عم) \dots (لا - عم)$$

$$(ب - عم)(ب - عم) \dots (ب - عم)$$

کی علامتیں مختلف ہیں۔ لیکن دوسرے کی علامت مثبت ہے کیونکہ اس کے تمام اجزا مثبت ہیں۔ پس پہلے کی علامت منفی ہے لیکن اس کے تمام اجزا منفی ہیں۔ اس لئے ان کی تعداد طاق ہونی چاہیے جس سے مسئلہ ثابت ہے۔ اس مسئلہ میں یہ یاد رہے کہ صنعتی اصولوں کو اتنی مرتبہ شمار کیا گیا ہے جتنی مرتبہ وہ تکرار پاتی ہیں۔

اس دفعہ کے مسئلہ پر تریسیمی طریقہ کا استعمال کرنا فائدہ بخش ہوگا۔ اس نقطہ نظر سے اس مسئلہ کی صداقت خود واضح ہو جاتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ جب کسی دو نقطوں کو ایک منحنی سے ملایا جاتا ہے تو ان نقطوں کے درمیان منحنی کا حصہ محور لا کو طاق مرتبہ قطع کرتا ہے جبکہ نقطے محور کی مخالف سمتوں میں ہوں اور جنت مرتبہ قطع کرتا ہے



یا بالکل قطع نہیں کرتا جبکہ نقطے محور کی ایک ہی جانب واقع ہوں۔

## مثالیں

- ۱۔ اگر ایک مساوات کی سب رقموں کی علامتیں مثبت ہوں تو کوئی مثبت اصل نہیں ہو سکتی۔
- ۲۔ اگر کسی مکمل مساوات کی رقموں کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں تو کوئی اصل منفی نہیں ہو سکتی۔
- ۳۔ اگر ایک مساوات کی پہلی چند رقموں کی علامتیں مثبت ہوں اور ان کے بعد آنے والی رقموں کی علامتیں منفی تو صرف ایک اصل مثبت ہوگی اور اس سے زیادہ نہیں۔  
دفعہ ۱۲ استعمال کرو اور صفر اور  $\infty$  کا اندراج کرو۔ دفعہ ۱۹ بھی استعمال کرو۔
- ۴۔ اگر ایک مساوات میں لاکی صرف جنت قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو کوئی حقیقی اصل نہیں ہو سکتی۔  
دفعات ۱۹ اور ۲۰ کا استعمال کرو۔
- ۵۔ اگر ایک مساوات میں لاکی صرف طاق قوتیں واقع ہوں اور سب سر مثبت ہوں تو صفر اصل کے سوا کوئی حقیقی اصل نہ ہوگی۔
- ۶۔ اگر ایک مساوات مکمل ہو تو ف (لا) میں علامت کی تکراروں کی تعداد ف (لا) میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی۔
- ۷۔ اگر ایک مکمل مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو مثبت اصلوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی اور منفی اصلوں کی تعداد علامت کی تکراروں کی تعداد کے مساوی۔
- ۸۔ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جنت ہو تو اس کی آخری رقم کی علامت مثبت ہونی چاہیئے اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو اس کی آخری رقم منفی ہونی چاہیئے۔  
لاکی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر مثبت ہو (دیکھو دفعہ ۱۲)۔
- ۹۔ مثال ۸ سے ثابت کرو کہ اگر ایک مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جنت ہو تو مثبت اصلوں کی تعداد اس جنت عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے جنت عدد کے مساوی۔ اور اگر تبدیلیوں کی تعداد طاق ہو تو مثبت اصلوں کی تعداد اس طاق عدد کے مساوی ہوگی یا اس سے چھوٹے طاق عدد کے مساوی۔ دوسرے الفاظ میں مثبت



اصولوں کی تعداد جب تبدیلیوں کی تعداد سے کم ہوتی ہے تو ان سے جفت عدد کا فرق رکھتی ہے۔  
 صفر اور ۵۵ کا اندراج کرو اور دفعہ ۲۲ استعمال کرو۔

۱۔ مساوات

$$۳ - لا^۲ - لا + ۱ = ۰$$

میں خیالی اصولوں کی تعداد کی سفلی حد معلوم کرو۔

جواب:- کم از کم دو خیالی اصلیں

۱۱۔ مساوات

$$۱۵ + لا^۲ + لا + ۱ - ۱۱ = ۰$$

کی اصولوں کی وضعیت معلوم کرو۔  
 دفعات ۱۴، ۱۹، ۲۰ استعمال کرو۔

جواب:- ایک مثبت، ایک منفی، دو خیالی

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۳ + ق + لا + ر = ۰$$

کی ایک اصل منفی اور دو اصلیں خیالی ہیں جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۳ - ق + لا + ر = ۰$$

کی ایک اصل منفی ہے اور باقی دو اصلیں خیالی ہیں یا دونوں مثبت جہاں ق اور ر لازماً مثبت ہیں۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا - ۱ = \frac{۱}{لا - ۱} + \frac{۲}{لا - ۲} + \frac{۳}{لا - ۳} + \dots + \frac{ن}{لا - ن} = لا - م$$

کی اصل خیالی نہیں ہو سکتی جہاں ۱، ۲، ۳، ...، ن سب کے سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔

لا کی بجائے علی الترتیب ع + ب، لا اور ع - ب، لا اور ج کرو اور پھر تفریق

کرو تو ایسا جملہ ملیگا جو صرف ب = ۰ لینے پر معدوم ہو سکتا ہے۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$لا^۲ - ۱ = ۰$$



کی صرف دو حقیقی اصلیں ۱ اور ۱ ہیں اور ان کے علاوہ اور کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو اس مساوات کی صرف ایک حقیقی اصل ۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے یہ اور سوال ۱۶ دفعات ۱۹ اور ۲۰ سے اخذ ہو سکے ہیں۔

۱۶۔ ثابت کرو کہ اگر ن جفت ہو تو مساوات

$$x^n + 1 = 0$$

کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اور اگر ن طاق ہو تو صرف ایک حقیقی اصل ۱ ہے اور کوئی دوسری حقیقی اصل نہیں ہے۔

۱۷۔ مساوات

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

کو حل کرو۔

یہ مساوات شکل

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\text{جواب: } x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

جذروں کی علامتوں سے چار اجتماع حاصل ہوتے ہیں اور جملہ بالا میں چار اصلیں شامل ہیں۔

۱۸۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں جملہ

$$x^2 + 2x + 1, x^2 + 11x + 1, x^2 + 12x + 1$$

کی چار مختلف قیمتیں ہوں جہاں  $x^2 = 1$ ۔

اگر ط کے اذخال سے کوئی قیید عائد نہ کیجاتی تو اس جملہ کی قیمتیں ہوتیں یہاں ۱۲ کو دوسرے جذر کے اندر اور اس کے باہر دونوں جگہ ایک ہی علامت کے ساتھ لینا چاہیئے۔ اس لئے کل چار قیمتیں ملتی ہیں۔

$$\text{جواب: } x = 1, -1, 2, -2$$

۱۹۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں جملہ



$$-6 + 9\sqrt{2} + 1 + 3\sqrt{2} - 19\sqrt{2} + 12$$

کی چار قسمیں ہوں جہاں طہ = ۱ = ۱

جواب :- لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۰</sup> - لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> = لا<sup>۴</sup> = ۱

۲۰۔ منطق سروں والی ایک مساوات بتاؤ جس کی اصلیں جملہ

طہ راپ + طہ راق + طہ رار

کی تمام قیمتیں ہوں جہاں

$$q_1^2 = 1, q_2^2 = 1, q_3^2 = 1$$

اس جملہ کی کل ۸ مختلف قیمتیں ہیں یعنی

اپ + اق + ار ، - اپ - اق - ار

آپ - اق - ر، - ای - اق + ر

- پ + اق = ار، پ - اق = ار

-آپ- اق + ار، آپ + اق - ار

فرض کرد کہ

لا = طم + آب + طم + اق + طم + ار

مریج لینے سے

لا = پ + ق + ر + ۲ (طی ط ی ا ق ر + ط ی ط ی ا ر پ + ط ی ط ی ا پ ق)

ارقام کو منتقل کرنے اور پھر مربع لینے سے

$$(لا - پ - ق - ر) = ۴ = (ق + ر + پ + پ + ق)$$

[illegible]

+ ط ط ط ط پ ق ر (ط پ + ط ا ق + ط ط ر )



ارتقام کو مستقل کرتے،  $\text{طیم} + \text{پا} + \text{طیم} + \text{آر}$  کی بجائے لا درج کرنے اور مربع  
لینے سے بالآخر ہمیں مساوات ملتی ہے۔

$$\text{لا} - \text{لا} + (\text{پا} + \text{ق} + \text{ر}) + \text{پ} + \text{ق} + \text{ر} - \text{پ} - \text{ق} - \text{ر} = 0$$

جو جذر کی علامتوں سے آزاد ہے۔  
یہ آٹھ درجی مساوات ہے جس کی اصلیں وہ ہیں جو اوپر لکھی گئی ہیں۔

چونکہ  $\text{طیم}$ ،  $\text{طیم}$ ،  $\text{فائب}$  ہر ایک کے ہیں اس لئے ۸ اصلوں  $\pm \text{پا}$   
 $\pm \text{ق}$   $\pm \text{ر}$  میں سے کسی کو لا کے مساوی فرض کیا جاسکتا ہے۔ محصلہ مساوات  
اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ لا میں سے ہر اصل کو تفریق کیا جائے اور پھر ان کو مسلسل  
ضرب دیا جائے جس طرح دفعہ ۱۶ کی مثال ۶ میں کیا گیا تھا۔



## تیسرا باب

### مساواتوں کے سروں اور اصلوں کے درمیان روابط اور اصلوں کے متشاکل تفاعلوں کا استعمال

۲۳۔ اصلوں اور سروں کے درمیان روابط۔ لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک لینے سے اور دفعہ ۱۶ کی طرح مساوات کی ن اصلوں کو عم، عم، عم، ... عن سے تعبیر کرنے سے مساوات متماثلہ لیلی

لا + ب<sup>۱-ن</sup> لا + ب<sup>۲-ن</sup> لا + ب<sup>۳-ن</sup> ... + ب<sup>۱۶-ن</sup> لا + ب<sup>۱۷-ن</sup> (۱) .....

≡ (لا-عم) (لا-عم) (لا-عم) ... (لا-عن)

اس متماثلہ کے دوسرے رکن کے اجزا کو باہم ضرب دو۔ حاصل ضرب میں لا کی

بڑی سے بڑی قوت والی رقم لا<sup>۱-ن</sup> کا سر ن مقداروں۔ عم، - عم، - عم، - عم کا مجموعہ ہے یعنی اصلوں کا مجموعہ جبکہ ان کی علامتیں بدل دی گئی ہوں (لا<sup>۲-ن</sup> کا سر ان مقداروں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، لا<sup>۳-ن</sup> کا سر ان مقداروں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے، علیٰ ہذا النقیاس اور آخری رقم تمام اصلوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ انکی علامتیں بدل دی گئی ہوں۔ اس لئے مساوات متماثلہ (۱) میں طرفین کی تناظر ارقام



کے سروں کو مساوی رکھنے سے مساواتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملے گا

$$\begin{aligned} \text{ب} &= (ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n) \\ \text{ب} &= (ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n) + (ع_1 - ع_n) \\ \text{ب} &= (ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n) + (ع_1 - ع_n) + (ع_2 - ع_{n-1}) \\ &\dots \dots \dots \\ \text{ب} &= (ع_1 + ع_2 + ع_3 + \dots + ع_n) + (ع_1 - ع_n) + (ع_2 - ع_{n-1}) + \dots + (ع_{n-1} - ع_2) \end{aligned}$$

36

ان کی مدد سے ہم اصلوں اور سروں کے درمیان جو روابط ہیں ان کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کر سکتے ہیں۔

مسئلہ — ہر جبری مساوات میں جس کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو دوسری رقم کا سر ب تبدیل علامت اس کی اصلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

تیسری رقم کا سر ب، اصلوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

چوتھی رقم کا سر ب، تبدیل علامت اصلوں میں سے تین تین کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔ سروں کی علامتیں باری باری سے منفی اور مثبت لیجاتی ہیں اور باہم ضرب کھانے والی اصلوں کی تعداد اصلوں کے تناظر تفاعل کی ہر رقم میں بقدر ایک کے بڑھتی رہے یہاں تک کہ ہم اس تفاعل پر پہنچیں جو ان اصلوں کا حاصل ضرب ہے۔

اگر لائن کا سر ب ایک نہ ہو (دیکھو وفد) تو مساوات کی ہر رقم کو اس سے

تقسیم کرنا چاہیئے۔ اس صورت میں اصلوں کا مجموعہ  $\frac{1}{b}$  کے مساوی ہوگا

اور ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ  $\frac{1}{b^2}$  کے مساوی ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔



نتیجہ صریح (۱) مساوات کی ہر اصل اس کی مطلق رقم کا ایک مقسوم علیہ ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح (۲) اگر مساوات کی سب اصلیں مثبت ہوں تو سر بشمول لا کی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کے سر کے (باری باری سے مثبت اور منفی ہونگے۔ اور اگر سب اصلیں منفی ہوں تو سب سر مثبت ہونگے۔ یہ بات مساواتوں (۲) سے ظاہر ہے۔

[دیکھو دفعات ۱۹ اور ۲۰]

۲۴۔ مسئلہ بالا کے اطلاقاً۔ دفعہ سابق کی مساواتوں (۲) سے چونکہ سروں اور ن اصلوں کے درمیان جدا جدا جہان ربط ملتے ہیں اس لئے ممکن ہے یہ خیال پیدا ہو کہ مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں اس سے کوئی فائدہ ہوگا۔ درحقیقت یہ بات نہیں ہے کیونکہ فرض کرو کہ ان مساواتوں کی مدد سے ہم ابتدائی مساوات کی ایک اصل عم حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ یہ اسی وقت ممکن ہے جبکہ دی ہوئی مساواتوں کی مدد سے دوسری اصلوں کو ساقط کیا جائے اور بالآخر وہ مساوات حاصل کی جائے جس کی ایک اصل عم ہے۔

اب خواہ کسی طریقہ سے یہ آخری مساوات حاصل ہو اس میں اصل عم کے

علاوہ دوسری اصلیں عم عم ... عن بھی موجود ہونگی اور عم کے دریافت کرنے

میں ان کو بھی دریافت کرنا پڑے گا۔ کیونکہ مساواتوں (۲) میں سب کی سب اصلیں ایک ہی طریقہ سے داخل ہوتی ہیں اور اس لئے اگر باقی دوسری اصلوں کو ساقط کر کے عم کا معامہ کرنا مقصود ہو (یا کسی دوسری اصل کا) تو ہم ایسی مساوات پر پہنچیں گے جو عم کے لئے حاصل شدہ مساوات سے صرف اس قدر فرق رکھیں گی کہ اصل عم کے بجائے اصل عم (یا وہ دوسری اصل) موجود ہوگی۔ اسلئے عمل اسقاط سے

ہمیں ایسی مساوات ملیگی جس کی ن اصلیں عم عم ... عن ہونی چاہئیں

اور اسلئے ایسی مساوات کا حل کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا کہ دی ہوئی مساوات کا۔ یہ آخری مساوات فی الحقیقت ابتدائی مساوات ہے جس میں مطلوبہ اصل لا کی



بجائے واقع ہوتی ہے۔ چنانچہ ہم کبھی مساوات کی صورت لیکر اس بات کو ثابت کرنے لگے۔ طریق عمل بالکل عام ہوگا اور اس لئے کسی درجہ کی مساوات پر جاری کیا جاسکتا ہے۔  
فرض کرو کہ مساوات

$$لا^۳ + ب^۲ لا^۲ + ب^۲ لا + ب^۲ = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔

دفعہ ۲۳ سے ہمیں حاصل ہوگا

$$ب^۲ = - (عہ + بہ + جہ)$$

$$ب^۲ = عہ + بہ + جہ + جہ + جہ + جہ$$

$$ب^۲ = - عہ + بہ + جہ$$

ان میں سے پہلی مساوات کو عہ سے اور دوسری کو عہ سے ضرب دو اور تینوں کو جمع کرو تو

$$ب^۲ + عہ + ب^۲ + عہ + ب^۲ = - عہ$$

$$عہ + ب^۲ + عہ + ب^۲ + عہ + ب^۲ = ۰$$

یا

جو دی ہوئی کبھی مساوات ہے جس میں لا کی بجائے عہ ہے۔

طالب علم مشق کے طور پر اسی نتیجہ کو ثابت کرنے کے لئے درجہ چہارم

کی مساوات لے سکتا ہے۔ عام صورت میں صرف یہ کرنا ہوگا کہ دفعہ ۲۳ کی

مساواتوں کو علی الترتیب عہ-۱، عہ-۲، عہ-۳ سے ضرب دیکر انکو جمع کیا جائے۔

اگرچہ مساواتوں (۲) سے مساوات کا عام حل دریافت کرنے میں کوئی

مدد نہیں ملتی لیکن اکثر عددی مساواتوں کا حل معلوم کرتے وقت ان سے سہولت

پیدا ہوتی ہے جبکہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص ربط دئے لگئے ہوں۔

(38)

ان کو وہ رشتے معلوم کرنے میں بھی استعمال کیا جاسکتا ہے جو سروں کے درمیان

ہونے چاہئیں جبکہ اصلوں کے درمیان رشتے دئے گئے ہوں۔



## مثالیں

۱ — مساوات

$$\text{لا}^۳ - ۵ \text{ لا}^۲ - ۱۶ \text{ لا} + ۸۰ = ۰$$

کو حل کرو جبکہ اس کی دو اصلوں کا مجموعہ صفر ہو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، بے، جہ ہیں تو

$$۵ = جہ + بے + عہ$$

$$۱۶ = عہ + عہ جہ + بے جہ$$

$$۸۰ = عہ بے جہ$$

بے + جہ = ۰ لینے سے ان میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا عہ = ۵

اور پھر دوسری یا تیسری مساوات سے حاصل ہوگا بے جہ = -۱۶۔ اس طرح بے اور جہ کی قیمتیں حاصل ہونگی ۴ اور -۴۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۵، ۴، -۴ ہیں۔

۲ — مساوات

$$\text{لا}^۳ - ۳ \text{ لا}^۲ + ۴ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں مساوی ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اس کی تین اصلیں عہ، عہ بے ہیں تو

$$۳ = بے + عہ$$

$$۰ = عہ + ۲ عہ بے$$

جن سے عہ = ۲، بے = -۱ حاصل ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ۲، ۲، -۱ ہیں۔

۳ — مساوات

$$\text{لا}^۴ + ۴ \text{ لا}^۳ - ۲ \text{ لا}^۲ - ۱۲ \text{ لا} + ۹ = ۰$$

میں مساوی اصلوں کے دو زوج ہیں۔ انہیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ بے، بے، بے ہیں تو

$$۲ = عہ + ۲ بے$$

$$۲ = عہ + بے + ۴ عہ بے$$



ان سے ع اور بہ کی قیمتیں ۱ اور ۳ حاصل ہونگی۔

۴ — مساوات

$$۱۹ - ۹۰ + ۱۲۱ + ۲۴ = ۰$$

کو جس کی دو اصلیں ۳ اور ۲ کی نسبت رکھتی ہیں حل کرو۔  
فرض کرو کہ اصلیں ع، بہ، جہ ہیں اور ۲ ع = ۳ بہ تو ع کے اسقاط سے ہمیں  
بہ آسانی حاصل ہوگا

$$۱۸ = ۵ + ۲ + ۱۱$$

$$۲۸ = ۳ + ۵ + ۲۰$$

(39)

ان مساواتوں سے ہمیں یہ میں مساوات درجہ دوم حاصل ہوگی

$$۱۹ - ۹۰ + ۵۶ = ۰$$

اس کی اصلیں ۴ اور ۱۲ ہیں۔ پہلی اصل سے ع اور جہ کی قیمتیں ۶ اور ۱

حاصل ہونگی۔ اسلئے مطلوبہ اصلیں ۶، ۴، ۱ ہیں۔

طالب علم یہاں پوچھیں گے کہ یہ کی قیمت  $\frac{۱۲}{۱۹}$  کا کیا مطلب ہے۔ گزشتہ  
مثالوں میں بھی یہ وقت پیش آئی ہوگی۔ لیکن یہ معلوم رہے کہ اس نوعیت کی مثالوں  
میں مطلوبہ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں اصولوں اور سروں کے درمیان  
تمام روابط کو استعمال کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ دی ہوئی  
شرط سے اصولوں کے درمیان ایک یا زیادہ ربط قائم ہو جاتے ہیں۔ جب کبھی یہ  
صورت پیدا ہو کہ اثنائے عمل میں استعمال ہونے والی مساواتوں سے اصولوں کے لئے  
قیمتوں کے ایک نظام سے زیادہ نظام حاصل ہوں تو اصلی اصلیں اس شرط کی مدد  
معلوم ہو سکتی ہیں کہ وہ اس مساوات (یا ان مساواتوں) کو پورا کرتی ہیں جو اصولوں  
اور سروں کے درمیان ہیں اور جن کا استعمال ان اصولوں کو معلوم کرتے وقت نہیں  
کیا گیا ہے۔ مثلاً موجودہ مثال میں قیمت بہ = ۴ سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو  
متروکہ مساوات

$$۲۴ = ۵ + ۲ + ۱۷$$

کو پورا کرتا ہے۔ قیمت بہ =  $\frac{۱۲}{۱۹}$  سے قیمتوں کا ایسا نظام ملتا ہے جو اس مساوات کو



پورا نہیں کرتا اور اسلئے مسترد کر دیا گیا ہے۔

۵ — مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۱۵$$

کو جس کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اصلیں عہ - ضہ، عہ، عہ + ضہ ہیں تو

$$۳ عہ = ۹$$

$$۳ عہ - ضہ = ۲۳$$

جن سے ہمیں تین اصلیں ۱، ۳، ۵ حاصل ہوں گی۔

۶ — مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ = ۲۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ - ۳ ضہ، عہ، عہ + ضہ، عہ + ۳ ضہ ہیں۔

جواب :- ۵، ۲، ۱، ۴

۷ — مساوات

$$لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۸$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ، عہ، عہ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے

تیسری مساوات سے ہمیں عہ = ۲ یا عہ = ۲ حاصل ہوگا اور پھر پہلی یا دوسری

مساوات سے ر میں درجہ دوم کی مساوات حاصل ہوگی۔

جواب :- ۲، ۲، ۲، ۲

۸ — مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۲۰$$

کو جسکی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہیں حل کرو۔

یہاں فرض کرو کہ اصلیں عہ، عہ، عہ، عہ ہیں۔ دفعہ ۲۳ کی مساواتوں

(۲) میں سے دوسری اور چوتھی مساوات استعمال کرو۔



۹ — مساوات

کو جسکی اصلیں سلسلہ پنہد یہ میں ہیں حل کرو۔

۱۰۔ مساوات

کو جسکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو۔

فرض کرو کہ اعلیٰ عہدہ، جس میں تو ہمیں ربط ملیگا

پس  $۳ج + ۳ج + ۳ج + ۳ج = ۱۲ج$  وغیرہ

۱۱ — مساوات

کو جسکی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہیں حل کرو۔

۱۲۔ اگر مساوات

کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اوسط اصل  $\frac{13}{12}$  ہے۔

۱۳ — مساوات

کی دو اصلیں مساوی مگر مختلف علامت ہیں۔ اسکی سبب اصلیں معلوم کرو۔

عہ + بہ = . لو اور دفعہ ۲۳ کی مساداتوں (۲) میں سے پہلی

اور تیسری مساوات استعمال کرو۔



جواب:  $\sqrt{3} - \sqrt{3} \pm 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}$

۱۴ — مساوات

$$3\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 50\sqrt{3} - 12 = 0$$

کی دو اصلوں کا حاصل ضرب ۲ ہے۔ سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب:  $\sqrt{3} - \sqrt{3} \pm 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}$

۱۵ — کعبی مساوات

$$3\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 50\sqrt{3} - 12 = 0$$

کی ایک اصل دوسری کا دو چند ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی اصل کو ایک مساوات درجہ دوم سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ مساوات (41)

$$3\sqrt{3} - 25\sqrt{3} + 50\sqrt{3} - 12 = 0$$

کی سب اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں اگر وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں۔

فرض کرو کہ اصلیں  $a, b, c, d, \dots$ ،  $a + (n-1)d$  ضہ ہیں تو مساواتوں (۲) میں سے پہلی مساوات سے حاصل ہوگا

$$b - a = n = a + (n-1)d$$

$$n = \frac{n(n-1)d}{2} + a \quad (1)$$

پھر چونکہ مقداروں کی کسی تعداد کے مربعوں کا مجموعہ = ان مقداروں کے مجموعہ کا مربع منفی ان میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کا دو چند اسلئے

$$b^2 - a^2 = (a + (n-1)d)^2 + (a + (n-2)d)^2 + \dots + a^2$$

$$n = \frac{n(n-1)(1-n)}{6} + a \quad (2)$$

(۱) کے مربع کو (۲) کے  $n$  گئے میں سے تفریق کرو تو ضہ  $b$  اور  $a$  کی قومیں



ملجائیگا۔ پھر ہم مساوات (۱) سے عہ معلوم کر سکتے ہیں۔ اسی طرح تمام اصولوں کو سروں  
ب اور ب کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۱۷۔ وہ شرط معلوم کرو جو مساوات

$$لا^۳ - ف لا^۲ + ق لا - ر = ۰$$

کے سروں سے پوری ہونی چاہیے اگر اس کی دو اصولوں عہ، ب میں ربط عہ + ب = ۰ موجود ہو۔  
جواب :- ف ق - ر = ۰

۱۸۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

$$لا^۳ - ف لا^۲ + ق لا - ر = ۰$$

کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں۔

$$جواب :- ف ر - ق^۲ = ۰$$

۱۹۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں ہوں۔

$$جواب :- ۲۴ ر - ۹ ف ق + ۲ ق^۲ = ۰$$

(دیکھو مثال ۱۲)

۲۰۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر لا + س = ۰$$

کی دو اصولوں میں ربط عہ + ب = ۰ موجود ہو اور اس صورت میں درجہ دوم کی  
دو مساواتیں معلوم کرو جنکی اصلیں (۱) عہ، ب اور (۲) جہ، ضہ ہوں۔

$$جواب :- ف ق ر - ق^۲ = ۰$$

$$(۱) ف لا + ر = ۰$$

$$(۲) لا^۲ + ف لا + \frac{ف س}{ر} = ۰$$

۲۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات بالا کی اصولوں میں ربط ب + جہ = عہ + ضہ

موجود ہو۔

$$جواب :- ف^۳ - ۲ ف ق + ۸ ر = ۰$$

۲۲۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر لا + س = ۰$$



کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ میں ربط عہ بہ = جہ ضہ موجود ہو۔

جواب :- ف<sup>۲</sup>س - ر<sup>۲</sup> = .

۲۳ — ثابت کرو کہ سوال ۲۲ میں حاصل شدہ شرط اس وقت بھی پوری ہوتی ہے جبکہ درجہ چہارم کی مساوات کی اصلیں سلسلہ ہندیہ میں ہوں۔

۲۵ — مساوات کے درجہ کا تنزل جبکہ اسکی دو اصلوں میں کوئی ربط موجود ہو۔ (42)

ہم نے دفعہ ماضی کی مثالوں میں یہ دیکھا ہے کہ اصلوں کے درمیان کوئی خاص روابط موجود ہوں تو ان کو متعین کرنے میں سروں اور اصلوں کو ملائی مساواتوں کا کیا فائدہ ہے۔ اب ہم عام صورت میں یہ ثابت کریں گے کہ

اگر مساوات ف (لا) = کی اصلوں میں سے دو کے درمیان یہ = فہ (عہ) کی شکل کا ربط موجود ہو تو مساوات کا درجہ بقدر ۲ کے گھٹایا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ مساوات متماثلہ

$$ف (لا) = لا^۱ + لا^۰ + لا^{-۱} + \dots + لا^{-n}$$

میں لا کی بجائے فہ (لا) مندرج کیا گیا ہے تو

$$ف (لا) = لا^۱ + لا^۰ + لا^{-۱} + \dots + لا^{-n}$$

اس مساوات متماثلہ کے دوسرے رکن کو ہم سہولت کی خاطر فا (لا) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب لا کی بجائے عہ مندرج کرنے سے

$$فا (عہ) = ف (عہ) = ف (بہ) = .$$

پس مساوات فا (لا) = کو عہ پورا کرتا ہے اور یہ ف (لا) = کو بھی







$$۲ لا + ۵ لا - ۶ لا - ۹ = ۰$$

$$۳ لا + ۷ لا - ۱۱ لا - ۱۵ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں۔ انکو معلوم کرو۔

جواب :- ۱ - ۳

۲ — مساواتوں

$$۲ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۹ = ۰$$

$$۳ لا + ۷ لا + ۱۱ لا + ۱۵ = ۰$$

میں دو اصلیں مشترک ہیں۔ وہ دو درجی مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں یہ اصلیں ہوں۔ ہر مساوات کی تیسری اصل بھی دریافت کرو۔

جواب :-  $۲ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۹ = ۰$  ،  $۳ لا + ۷ لا + ۱۱ لا + ۱۵ = ۰$

$۲ لا + ۵ لا + ۶ لا + ۹ = ۰$   
 $۳ لا + ۷ لا + ۱۱ لا + ۱۵ = ۰$

۲۶ — اکائی کے جذر الکعب۔

$$۱ - ۱ = ۰ ، ۱ + ۱ = ۲$$

کی شکل کی مساواتوں کو جنہیں صرف بڑی سے بڑی قوت والی رقم اور مطلق رقم شامل ہوں ہم ثنائی مساواتیں کہینگے۔ قبل الذکر مساوات کی اصلوں کو ہم اکائی کے  $۱$  و  $۱$  جذر کہینگے۔ اگلے باب میں ان شکلوں پر بحث کی جائیگی۔ فی الحال ہم ثنائی کعبی مساوات کی سادہ صورت پر اکتفا کرتے ہیں جس کے لئے اصلوں کی بعض سودمند خواص بہ آسانی ثابت کئے جاسکتے ہیں۔ دفعہ ۱۶ مثال ۵ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ کعبی مساوات

$$۱ - ۱ = ۰$$

کی اصلیں حسب ذیل ہیں



ان خیالی اصلوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم سے تعیس کریں تو دوسری خیالی اصل سے ہو جائیگی۔ مربع لینے سے یہ بات ظاہر ہے یا اس کو ہم اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں:-

اگر کبھی کی ایک اصل سے ہو تو سے بھی ایک اصل ہونی چاہئے کیونکہ  
 سے ۱ = اس لئے مربع لینے سے ۱ = ۱ (یعنی سے ۱ = ۱) اس طرح سے  
 بھی کبھی مساوات لا۔ ۱ = کو پورا کرتا ہے اور اس لئے اس کی ایک اصل سے  
 بھی ہے۔ اب ہمیں مساوات متماثلہ ملیگی

$$\begin{aligned} \text{لا۔ ۱} &= ۱ \quad (۱ - \text{لا}) \quad (\text{لا} - \text{سہ}) \quad (\text{لا} - \text{سہ}) \\ \text{لا کو۔ لا میں تبدیل کرنے سے مساوات متماثلہ} \\ \text{لا} + ۱ &= ۱ + (\text{لا} + ۱) \quad (\text{لا} + \text{سہ}) \quad (\text{لا} + \text{سہ}) \end{aligned}$$

حاصل ہوگی جس سے

$$\text{لا} + ۱ = ۰$$

کی اصلیں معلوم ہونگی۔

جہاں کہیں مقداروں کے کسی حاصل ضرب میں اکائی کے جذرا لکعب داخل ہوں اور انکی قوتیں ۲ سے زیادہ پیش ہوں تو ہم انکی بجائے سے یا سے یا ایک رکھ سکتے ہیں مثلاً

$$\text{سہ} = \text{سہ} \times \text{سہ} = \text{سہ}^۳ = \text{سہ}^۲ \times \text{سہ} = \text{سہ}^۴$$

$$\text{سہ}^۶ = \text{سہ}^۳ \times \text{سہ}^۳ = ۱ \quad \text{وغیرہ}$$

دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) میں سے پہلی یا دوسری مساوات سے

اکائی کے جذرا لکعبوں کی حسب ذیل خاصیت ملتی ہے

$$۱ + \text{سہ} + \text{سہ}^۲ = ۰$$

اس مساوات کی مدد سے کسی جملہ کو جس میں حقیقی مقادیر اور خیالی

جذرا لکعب داخل ہوں ہم ف + سہ ق + ف + سہ ق + سہ ق + سہ ق میں سے کسی ایک شکل میں لکھ سکتے ہیں۔



## مثالیں

۱ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(سم + سُن) (سُم + سَن)$$

منطق ہے۔

جواب :-  $م^۲ - م - ن + ن^۲$

۲ — حسب ذیل متماثلہ مساواتوں کو ثابت کرو۔

$$م^۳ + ن^۳ = (م + ن) (سم + سُن) (سُم + سَن)$$

$$م^۲ - ن^۲ = (م - ن) (سم - سُن) (سُم - سَن)$$

۳ — ثابت کرو کہ حاصل ضرب

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ) (عہ + سہ بہ + سہ جہ)$$

منطق ہے۔

جواب :-  $عہ^۲ + بہ^۲ + جہ^۲ - عہ بہ - جہ عہ - عہ بہ$

۴ — متماثلہ مساوات

$$(عہ + بہ + جہ) (عہ + سہ بہ + سہ جہ) (عہ + سہ بہ + سہ جہ)$$

$$\equiv عہ^۳ + بہ^۳ + جہ^۳ - عہ بہ جہ - عہ جہ بہ - عہ بہ جہ$$

کو ثابت کرو۔

۵ — متماثلہ مساوات

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ)^۳ + (عہ + سہ بہ + سہ جہ)^۳$$

$$\equiv (عہ - بہ - جہ)^۲ (عہ - جہ - عہ) (عہ - عہ - بہ)$$

سوال (۲) استعمال کرو۔

کو ثابت کرو۔

۶ — متماثلہ مساوات

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ)^۳ - (عہ + سہ بہ + سہ جہ)^۳$$

$$\equiv عہ^۳ - ۳ عہ بہ جہ + ۳ عہ بہ جہ - عہ^۳$$

سوال (۲) استعمال کرو اور سہ - سہ کی بجائے اسکی قیمت

کو ثابت کرو۔







دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً معمولی جذرا لکعب ۳ کے علاوہ عدد ۲ کے دو خیالی جذرا لکعب

$$-\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

ہیں۔ انکا لکعب لینے سے اس بیان کی تصدیق ہو سکتی ہے۔  
۱۔ وہ منطق مساوات بناؤ جس کی ایک اصل

$$\sqrt[3]{\text{س}} + \sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ق}} + \sqrt[3]{\text{ف}} + \sqrt[3]{\text{ت}}$$

ہو جہاں  $\sqrt[3]{\text{س}} = ۱$ ۔ سوال ۸ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

جواب:۔  $\sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ق}} + \sqrt[3]{\text{ف}} + \sqrt[3]{\text{ت}} = ۰$

۱۱۔ منطق سروں کے ساتھ مساوات بناؤ جسکی ایک اصل

(46)

$$\sqrt[3]{\text{ط}} + \sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ق}}$$

ہو جہاں  $\sqrt[3]{\text{ط}} = ۱$ ،  $\sqrt[3]{\text{ا}} = ۱$ ۔ مساوات

$$\sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ق}} + \sqrt[3]{\text{ط}} = ۰$$

کی طرفین کا لکعب لیتے سے اور لا کی بجائے اسکی بائیں طرف کی قیمت درج کر نیے  
مساوات ملے گی

$$\sqrt[3]{\text{ا}} - \sqrt[3]{\text{ق}} = \sqrt[3]{\text{ط}}$$

پھر طرفین کا لکعب لینے سے حاصل ہو گا

$$(\sqrt[3]{\text{ا}} - \sqrt[3]{\text{ق}})^3 = \sqrt[3]{\text{ط}}$$

اب چونکہ  $\sqrt[3]{\text{ط}}$  اور  $\sqrt[3]{\text{ط}}$  میں سے ہر ایک کی قیمت ایسا یا سہ ہو سکتی ہے

اسلئے اس مساوات کی نو اصلیں ہیں

$$\sqrt[3]{\text{ا}} + \sqrt[3]{\text{ق}} = \sqrt[3]{\text{ط}} \quad \sqrt[3]{\text{ا}} - \sqrt[3]{\text{ق}} = \sqrt[3]{\text{ط}} \quad \sqrt[3]{\text{ق}} - \sqrt[3]{\text{ا}} = \sqrt[3]{\text{ط}}$$



سہ ۳ا ف + سہ ۳ا ق ، سہ ۳ا ف + سہ ۳ا ق ، سہ ۳ا ف + سہ ۳ا ق  
سہ ۳ا ف + سہ ۳ا ق ، سہ ۳ا ف + سہ ۳ا ق ، سہ ۳ا ف + سہ ۳ا ق

ہم یہاں یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آخری مساوات میں طم اور طم داخل نہیں ہوتے  
اسلئے ابتداءً ان اصولوں میں سے کسی ایک کو لا کے مساوی قرار دیا جاسکتا ہے اور  
مساوات مرتب کی جاسکتی ہے۔ آخری مساوات اس طرح بھی حاصل ہو سکتی تھی کہ  
ہم لا۔ ۳ا ف۔ ۳ا ق کی شکل کے نواجزائے ضربی کو باہم ضرب دیتے

جہاں یہ نواجزائے ضربی مندرجہ بالا تو اصولوں سے حاصل ہوتے ہیں۔  
۱۲۔ تین کعبی مساواتیں علیحدہ علیحدہ بناؤ جنکی اصلیں مثال ماسبق کی مساوات کی  
اصولوں میں سے تین تین (انتخابی ستونوں میں لکھی ہوئیں) کے جٹ ہوں۔  
ہم ان مساواتوں کو مثال ۸ کی مدد سے لکھ سکتے ہیں اس طور پر کہ پہلے م

اور ن کو ۳ا ف ، ۳ا ق کے مساوی ، پھر سہ ۳ا ف ، سہ ۳ا ق کے مساوی  
اور آخر میں سہ ۳ا ف ، سہ ۳ا ق کے مساوی لیتے ہیں۔

جواب :- لا۔ ۳ا ف ق لا۔ ف۔ ق۔ =

لا۔ ۳ا سہ ۳ا ف ق لا۔ ف۔ ق۔ =

لا۔ ۳ا سہ ۳ا ف ق لا۔ ف۔ ق۔ =

۲۷۔ اصولوں کے متشاکل تفاعل۔ کسی مساوات کی

اصولوں کے متشاکل تفاعل وہ تفاعل ہیں جنہیں اصلیں ایک ہی وضع پر داخل

ہوتی ہیں اس طور پر کہ تفاعل قیمت میں غیر متغیر رہتا ہے جب کسی دو اصولوں کو  
ایس میں تبدیل کر دیا جاتا ہے۔ مثلاً اصولوں کے وہ تفاعل (اصولوں کا مجموعہ



(47)

اصولوں میں سے دو دو کے حاصل ضربوں کا مجموعہ (وغیرہ) جو دفعہ ۲۳ میں بیان ہوئے ہیں اس نوعیت کے تفاعل ہیں کیونکہ اگر ان میں سے کسی جملہ میں مثال کے طور پر عہ کی بجائے عہ اور عہ کی بجائے عہ لکھا جائے تو جملہ کی قیمت غیر متغیر رہتی ہے۔

دفعہ ۲۳ کے تفاعل اصولوں کے سادہ ترین متشاكل تفاعل ہیں کیونکہ انہیں ہر اصل صرف اپنی پہلی قوت میں داخل ہوتی ہے۔

ہم اصولوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) کی مدد سے اصولوں کے مختلف متشاكل تفاعلوں کی قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔ آئندہ کسی باب میں جس میں اس مضمون پر بحث کی جائیگی ہم ثابت کرینگے کہ اصولوں کے کسی منطق متشاكل تفاعل کو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ یہاں جو مثالیں دی جائیں گی ان میں سے اکثر کعبی اور چاروگی کی سادہ صورتوں سے متعلق ہوں گی اور یہ مثالیں فی الحال اس قسم کے جملوں کو سروں کی رقوم میں معمولی ابتدائی طریقوں سے حاصل کرنے کے لئے کافی ہیں۔  
عام طور پر کسی متشاكل تفاعل کو اسکی کسی رقم کے پیچھے علامت ح لگا کر تعبیر کیا جاتا ہے اور اسکی مدد سے پورا تفاعل لکھا جاسکتا ہے۔ مثلاً اگر کعبی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ح عہ بہ سے متشاكل تفاعل

عہ بہ + بہ جہ + جہ عہ

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصولوں کے جتنے حاصل ضرب مل سکتے ہیں انکو لیا گیا ہے اور ہر ایک کا جدا گانہ مربع لیکر جمع کیا گیا ہے۔ اسی طرح ح عہ بہ سے مجموعہ

عہ بہ + عہ جہ + بہ جہ + جہ عہ + جہ بہ

تعبیر ہوگا جس میں دو دو اصولوں کی چھٹی ترتیبیں ہو سکتی ہیں لیکن یہاں اور ہر رقم کی پہلی اصل کا مربع لیا گیا ہے۔

حسب ذیل مثالوں میں مختلف متشاكل تفاعل واقع ہونگے۔ انہی مدد سے طالب علم کو اس قسم کے جملے لکھنے کی مشق ہو جائیگی جب



نمونہ کی ایک قسم دی گئی ہو۔

(48)

## مثالیں

۱۔ کبھی مساوات

$$لا + ف لا + ق لا + ر =$$

کی اصلوں کے جملہ  $\Sigma$  عہ بہ کی قیمت معلوم کرو۔  
مساواتوں

$$عہ + بہ + جہ = ف$$

$$بہ + جہ + عہ = ق$$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$\Sigma عہ بہ + ۳ عہ بہ جہ = ف ق$$

$$\Sigma عہ بہ = ۳ ر - ف ق$$

۲۔ اسی کبھی مساوات کی صورت میں

$$عہ + بہ + جہ$$

کی قیمت معلوم کرو۔  
جواب :-  $\Sigma عہ = ف - ۲ ق$

۳۔ اسی کبھی مساوات کی صورت میں

$$عہ + بہ + جہ$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$\Sigma عہ$  اور  $\Sigma عہ$  کی قیمتوں کو ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$$عہ + بہ + جہ + ۳ عہ بہ = ف + ۲ ف ق$$

پس مثال ۱ سے

$$\Sigma عہ = ف + ۳ ف ق - ۳ ر$$

۴۔ اسی کبھی مساوات کی صورت میں

$$بہ + جہ + عہ + عہ بہ$$

کی قیمت معلوم کرو۔



ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

یہ  $ج^۲ + ج^۱ع^۱ + ع^۲ب^۱ + ع^۲ب^۲جہ = ق^۲$

جس سے  $ج^۲ع^۲ب^۱ = ق^۲ - ۲فر$

۵۔ اسی کئی مساوات کی صورت میں

(بہ + جہ) (عہ + عہ) (عہ + بہ)

کی قیمت معلوم کرو۔

یہ جملہ  $۲عہ بہ جہ + ج^۲ع^۲ب^۱$  کے مساوی ہے۔ جواب:۔ ر۔ ف

۶۔ چار درجہ مساوات

$لا + ف لا + ق لا + ر لا + س =$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

$ع^۲بہ جہ + ع^۲بہ ضہ + ع^۲جہ ضہ + ع^۲عہ جہ + ع^۲عہ ضہ + ع^۲بہ ضہ جہ$

$+ ج^۲عہ بہ + ج^۲عہ ضہ + ج^۲بہ ضہ + ضہ عہ بہ + ضہ عہ جہ + ضہ جہ بہ$

کی قیمت معلوم کرو۔

$ع + بہ + جہ + ضہ = ف$

$عہ بہ جہ + عہ بہ ضہ + عہ جہ ضہ + بہ جہ ضہ = ر$

کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوگا

$ج^۲ع^۲بہ جہ + ۲عہ بہ جہ ضہ = ف ر$

پس  $ج^۲ع^۲بہ جہ = ف ر - ۲س$

۷۔ اسی چار درجہ مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$ع^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ضہ$

کی قیمت معلوم کرو۔

$ج^۲عہ$  کا مربع لینے سے ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$ج^۲ع^۲ = ف^۲ - ۲ق$

۸۔ اسی چار درجہ مساوات کی صورت میں متشاکل تفاعل

$ع^۲بہ + ع^۲جہ + ع^۲ضہ + ب^۲جہ + ب^۲ضہ + ج^۲ضہ$



کی قیمت معلوم کرو۔  
مساوات

$$ح عہ بہ ق = ق$$

کا مربع لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$ح عہ بہ ۲ + ۲ عہ بہ جہ ۲ + ۲ عہ بہ جہ ضہ ۲ = ق ۲$$

پس مثال ۶ سے

$$ح عہ بہ ۲ = ق ۲ - ۲ ف ۲ + ۲ س$$

۹۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں  $ح عہ بہ$  کی قیمت معلوم کرو۔

اس متشاکل تفاعل کو بنانے کے لئے ہم حروف عہ، بہ کی دو ترتیبیں

عہ بہ اور بہ عہ لیتے ہیں۔ ان سے  $ح$  کی دو قیمتیں عہ بہ اور بہ عہ حاصل ہوتی ہیں۔

اسی طرح حروف عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے ہر زوج سے دو دو قیمتیں حاصل ہونگی۔

اس طرح متشاکل تفاعل میں کل بارہ قیمتیں ہونگی۔

مساواتوں

$$ح عہ بہ ق = ق، ح عہ بہ = ف ۲ - ۲ ق$$

کو باہم ضرب دو اور دیکھو کہ

$$ح عہ بہ ح عہ بہ = ح عہ بہ + ح عہ بہ جہ$$

[ اس آخری مساوات سے جس قسم کے نتیجے تعبیر ہوتے ہیں انکی تصدیق

اس طرح ہو سکتی ہے کہ مساوات کی طرفین میں رقموں کی تعداد وہی ہونی چاہئے۔

مثلاً موجودہ مثال میں چونکہ  $ح عہ$  میں چار قیمتیں اور  $ح عہ بہ$  میں چھ قیمتیں ہیں ان کے

حاصل ضرب میں ۲۴ قیمتیں ہونی چاہئیں اور یہ درحقیقت  $ح عہ بہ$  کی بارہ قیمتیں

اور  $ح عہ بہ$  جہ کی بارہ قیمتیں ہیں۔ ]

اس لئے اشلہ ماسبق کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$ح عہ بہ = ف ۲ ق - ۲ ق ۲ - ۲ ف ۲ + ۲ س$$

۱۰۔ اسی چار درجی مساوات کی صورت میں

$$عہ + بہ + جہ + ضہ$$



کی قیمت معلوم کرو۔

$$\begin{aligned} & \text{۳} \text{ عہ کا مربع لینے اور حاصل شدہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے} \\ & \text{۳ عہ} = \text{۲ ق} + \text{۲ ق} - \text{۲ ف} + \text{۲ ق} + \text{۲ ف} - \text{۲ ر} - \text{۲ س} \end{aligned}$$

۱۱۔ مساوات

$$\text{لا} + \text{ب} \text{ لا} + \text{ب} \text{ لا} + \dots + \text{ب} \text{ لا} = \text{بن}$$

کی اصلوں کے مربعوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

۳ عہ کا مربع لینے سے ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$$\text{ب} \text{ لا} = \text{۲ عہ} + \text{۲ عہ} - \text{۲ عہ}$$

پس

$$\text{۳ عہ} = \text{ب} \text{ لا} - \text{۲ عہ}$$

۱۲۔ مثال مابقی کی مساوات کی اصلوں کے متکافیوں کے مجموعہ کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

دفعہ ۲۳ کی آخری دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

(50)

$$\text{عہ عہ} \dots \text{عہ} + \text{عہ عہ} \dots \text{عہ} + \dots + \text{عہ عہ} \dots \text{عہ} = \text{بن}$$

$$(1 - \text{بن}) = \text{بن}$$

$$\text{اور عہ عہ} \dots \text{عہ} = (1 - \text{بن})$$

پہلی مساوات کو دوسری سے تقسیم کریں تو

$$\frac{1 - \text{بن}}{\text{بن}} = \frac{1}{\text{عہ}} + \dots + \frac{1}{\text{عہ}} + \frac{1}{\text{عہ}}$$

$$\text{یعنی } \frac{1 - \text{بن}}{\text{بن}} = \frac{1}{\text{عہ}}$$

اسی طرح اصلوں کے متکافیوں میں سے دو دو کے، تین تین کے، وغیرہ حاصل ضربوں کا مجموعہ آخر سے تیسرے یا آخر سے چوتھے وغیرہ سر کو آخری سر سے



تقسیم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔

۱۳ — کبھی مساوات

۱ لا<sup>۱</sup> + ۳ لا<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> + ۳ لا<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> = ۱ لا<sup>۱</sup> + ۳ لا<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

(بہ - جہ) + (جہ - عہ) + (عہ - بہ)  
نوٹ: — عام طور پر مساوات کے سروں کو ثنائی سروں کی صورت میں لکھنا مفید ہوگا جیسا کہ مثال بالا میں کیا گیا ہے یعنی حرفی سروں لا<sup>۱</sup>، لا<sup>۱</sup>، لا<sup>۱</sup> وغیرہ کے علاوہ عددی سروں ہی ہوں جو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یہاں چونکہ مساوات تیسرے درجہ کی ہے اسلئے یکے بعد دیگرے آئیو الے عددی سروں وہ ہیں جو تیسری قوت کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں یعنی ۱، ۳، ۳، ۱۔  
ہمیں یہ آسانی حاصل ہوگا

$$۱ لا^۱ (بہ - جہ) + ۳ لا^۱ (جہ - عہ) + ۳ لا^۱ (عہ - بہ) = ۱ لا^۱ (بہ - جہ)$$

۱۴ — مساوات درجہ دوم

(لا - عہ) (بہ - جہ) + (لا - بہ) (جہ - عہ) + (لا - جہ) (عہ - بہ) = ۰  
کے متواتر سروں کو مثال مابقی کی کبھی مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کرو جہاں

کبھی کی اصلیں عہ، بہ، جہ ہیں۔  
یہاں مثال مابقی کے متشاکل تفاعل کے علاوہ حسب ذیل دو متشاکل تفاعل کی قیمتیں معلوم کرنی ہوں گی:۔

$$عہ (بہ - جہ) + بہ (جہ - عہ) + جہ (عہ - بہ) ،$$

$$عہ (بہ - جہ) + بہ (جہ - عہ) + جہ (عہ - بہ) ،$$

جواب:۔ (لا - بہ) (لا - جہ) + (لا - جہ) (لا - بہ) = ۰

۱۵ — مثال ۱۳ کی کبھی مساوات کی صورت میں

$$(۲ عہ - بہ - جہ) (جہ - عہ) (۲ جہ - عہ - بہ) (عہ - بہ)$$



کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

چونکہ  $۲عہ - بہ - جہ = ۳عہ - (عہ + بہ + جہ) + \frac{۱۳}{۱}$

اسلئے مطلوبہ قیمت متماثلہ مساوات

(51)

$\frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} = \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱}$

میں لا کی بجائے  $\frac{۱۳}{۱}$  درج کرنے سے یہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

جواب :-  $\frac{۱۳}{۱} (۲عہ - بہ - جہ) (۲عہ - بہ - جہ) (۲عہ - بہ - جہ) (۲عہ - بہ - جہ)$

$(۲عہ - بہ - جہ) = ۲۴ - (۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳)$

۱۶۔ چار درجی مساوات

$\frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} = \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱} + \frac{۱۳}{۱}$

کے سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل متشاکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

$(بہ - جہ) (عہ - ضہ) + (جہ - عہ) (بہ - ضہ) + (عہ - بہ) (جہ - ضہ) + (بہ - عہ) (جہ - ضہ)$

یہاں مساوات بالا میں عددی سروہ ہیں جو چوتھی قوت کے ثنائی جملہ کے پھیلاؤ میں واقع ہوتے ہیں۔ زیر بحث متشاکل تفاعل

$۲عہ - ۲بہ - ۲عہ + ۲جہ + ۲عہ - ۲بہ - ۲عہ + ۲جہ$

کے متماثل ہے۔ مثالوں ۶ اور ۸ کے نتیجوں کو استعمال کیا جائے تو

$\frac{۱۳}{۱} \{ (بہ - جہ) (عہ - ضہ) + (جہ - عہ) (بہ - ضہ) + (عہ - بہ) (جہ - ضہ) + (بہ - عہ) (جہ - ضہ) \}$

$= ۲۴ (۱۳ + ۱۳ + ۱۳ + ۱۳)$

۱۷۔ مثال ۱۶ کی مساوات کی چار اصلوں میں سے دو دو کے چھ حاصل ضرب

لئے جائیں اور حاصل ضرب میں (مثلاً عہ بہ میں) بقیہ دو اصلوں کا حاصل ضرب

(یعنی جہ ضہ) جمع کیا جائے تو ہمیں تین مجموعے ملینگے

$بہ جہ + عہ ضہ + جہ عہ + بہ ضہ + عہ بہ + جہ عہ$

اب سروں کی رقوم میں اصلوں کے حسب ذیل دو متشاکل تفاعلوں کی

قیمتیں معلوم کرنا مطلوب ہے:-



مؤخر الذکر متشکل تفاعل ضرب دینے کے بعد

کے مساوی ہے اور ہم معمولی عمل حساب کے ذریعہ حاصل کرتے ہیں

۱۸۔ مثال ۱۶ کی چار درجی مساوات کے سروں کی رقوم میں اصولوں کے  
 حسب ذیل متشکل تفاعل کی قیمت معلوم کرو:-

یہ تفاعل بھی چار درجی مساوات کے نظریہ میں کافی اہمیت رکھتا ہے۔ اس غرض سے کہ اسکے لکھ لینے میں کوئی ابہام پیدا نہ ہو ہم اس ترقیم کی تشریح کریں گے جو اس کتاب میں ہمیشہ استعمال ہوگی۔ یہ ترقیم اس وقت بھی اسی طرح کارآمد ہوگی جب دوسرے ایسے تفاعل دئے جائیں جو چار درجی مساوات کی اصولوں کے فرقوں پر مشتمل ہوں۔ اصولوں 'عہ' 'بہ' 'جہ' کو دائری ترتیب میں رکھنے سے ہمیں تین فرق



یہ - جہ، جہ - ع، ع - یہ ملتے ہیں اور ہر اصل میں سے ضہ کو تفریق کرنے سے  
تین دوسرے فرق ع - ضہ، یہ - ضہ، جہ - ضہ ملتے ہیں۔ ان میں سے ہم دو دو  
فرق لیکر انہیں اس طرح مرتب کرتے ہیں :-

(بہ - جہ) (اعہ - ضہ) (جہ - عہ) (یہ - ضہ) (اعہ - بہ) (جہ - ضہ)  
 زیر بحث تفاضل ان تین جملوں کے فرقوں کا حاصل ضرب ہے جبکہ ان فرقوں کو  
 حسب معمول دائری ترتیب میں لیا گیا ہو۔  
 اب مثال ماسبق میں لہ 'مہ' نہ کی جو قیمتیں دی گئی ہیں انکو استعمال کرنے سے  
 ہمیں حاصل ہوگا

$$-م + ن \equiv (ج - ع) (ض - ه) - ن + ل \equiv (ج - ع) (ع - ه) (ب - ض)$$

$$- ل + م \equiv (ع - ه) (ب - ض)$$

اس لئے ہمیں

(۲۲-مه-ت) (۲۳-مه-ن) (۲۴-ن-ل-مه)

(۳-۳-۳) (۳-۳-۳) (۳-۳-۳)

کی قیمت سروں کی رقوم میں معلوم کرنا ہوگی۔

اسکو ضرب دید اور ۳۰۰۰۰۰ کی قیمت درج کرو اور مثال ۱۰ کے نتیجوں کو استعما  
کرو تو مطلوبہ جملہ حسب ذیل حاصل ہوگا

۱) (۲-۲-۲) (۲-۲-۲) (۲-۲-۲)

$$= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}) \pi^3 =$$

سروں کا یہ تفاعل اور اشلہ ۱۳، ۱۵، ۱۶ میں حاصل شدہ تفاعل کبھی اور چار درجی مساواتوں کے نظریہ میں بہت اہمیت رکھتے ہیں۔

۱۹۔ مثال ۱۶ کے چار درجہ کے سروں کی رقوم میں متشاکل تفاعل

(ع - ب) + (ع - ج) + (ع - د) + (ب - ج) + (ب - د) + (ج - د)  
کی قیمت معلوم کرو۔

۱۳۔ انکو اختصاراً (عہ۔ بہ) سے بیان کیا جاسکتا ہے۔



جواب :-  $\text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2 = (\text{عہ} - \text{بہ})^2 = ۳۸ (\text{ا}^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2)$   
 ۲۰۔ مثال ۱۶ کے چار درجہ کی صورت میں سروں اور اصولوں کے درمیان حسب ذیل ربط ثابت کرو :-  
 $\text{ا}^3 (\text{بہ} + \text{جہ} - \text{عہ} - \text{ضہ}) (\text{جہ} + \text{عہ} - \text{بہ} - \text{ضہ}) (\text{عہ} + \text{بہ} - \text{جہ} - \text{ضہ})$   
 $= ۳۲ (\text{ا}^2\text{ب}^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2 + \text{ا}^2\text{ج}^2\text{ب}^2)$

## ۲۸۔ متشاکل تفاعلوں سے متعلق مسائل - مندرجہ ذیل (53)

دوسرے جن پر ہم اس مضمون کی بحث ختم کرتے ہیں بہت سی مثالوں میں ان نتیجوں کی تصدیق کرنے میں مفید ثابت ہوئے جو متشاکل تفاعلوں کی قیمتوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔  
 مسئلہ ۱۔ اصولوں کے کسی متشاکل تفاعل کی کسی رقم میں سب اصولوں کے قوت نماؤں کا مجموعہ سروں کی رقوم میں تفاعل کی متناظر قیمت کی ہر رقم کے لائقوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔  
 ظاہر ہے کہ متشاکل تفاعل کی ہر رقم کے لئے قوت نماؤں کا مجموعہ وہی ہوتا ہے۔ اس مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا ”تمام اصولوں کا درجہ“ کہہ سکتے ہیں۔ اس مسئلہ کی صداقت دفعہ ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷ اور غیرہ کی مخصوص صورتوں سے ظاہر ہے۔ عام صورت میں اسکی تصدیق دفعہ ۲۳ کی مساواتوں (۲) سے ہو سکتی ہے کیونکہ ان مساواتوں میں ہر سر کا لاحقہ اصولوں کے متناظر تفاعل کے ”تمام اصولوں کے درجہ“ کے مساوی ہے۔ پس سروں کی کسی قوتوں کے کسی حاصل ضرب میں لائقوں کا مجموعہ اصولوں کے متناظر تفاعل کے تمام رقموں کے درجہ کے مساوی ہونا چاہئے۔  
 مسئلہ ۲۔ جب کسی مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھا جائے تو اصولوں کے کسی متشاکل تفاعل کے لئے سروں کی رقوم میں ایسا جملہ ملیگا جس میں تمام رقموں کے عددی اجزائے ضربی کا جبری مجموعہ صفر کے مساوی ہوگا اگر متشاکل تفاعل صرف اصولوں کے فرقوں کا تفاعل ہو۔

اس مسئلہ کی صداقت عام مساوات کو ثنائی سروں کے ساتھ لکھ کر تمام







۴ — اسی مساوات کے لئے متشکل تفاعل  
 $(ب^۲ - ج^۲) + (ج^۲ - ع^۲) + (ع^۲ - ب^۲)$

کی قیمت معلوم کرو۔

ج ع کا مربع لینے سے ج ع بہ آسانی حاصل ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۲ مثال ۳)  
**جواب :-** ۲ ف - ۱۲ ف ق + ۱۲ ف ر + ۸ ف ق

- ۸ ف ق ر - ۶ ق

۵ — اسی مساوات کے لئے

$$\frac{ب^۲ + ع^۲}{ب + ع} + \frac{ج^۲ + ع^۲}{ج + ع} + \frac{ب^۲ + ج^۲}{ب + ج}$$

**جواب :-** ۲ ف ق - ۴ ف ر - ۲ ق  
 ر - ف ق

کی قیمت معلوم کرو۔

۶ — اسی مساوات کے لئے

$$\frac{ع^۲ + ب^۲}{ب + ج} + \frac{ب^۲ + ج^۲}{ج + ع} + \frac{ج^۲ + ع^۲}{ع + ب}$$

**جواب :-** ۲ ف - ۳ ف ق + ۵ ف ر + ق  
 ر - ف ق

کی قیمت معلوم کرو۔

۷ — اسی مساوات کے لئے

$$\frac{۲ ب^۲ - ج^۲}{ب + ج} + \frac{۲ ج^۲ - ع^۲}{ج + ع} + \frac{۲ ع^۲ - ب^۲}{ع + ب}$$

کی قیمت معلوم کرو۔

**جواب :-** ۲ ف - ۲ ف ق + ۱۲ ف ر - ۸ ق  
 ۴ ف ق - ۲ ف - ۸ ر

۸ — اسی مساوات کے لئے متشکل تفاعل ج ع (ع - ب) کی قیمت معلوم کرو۔ (55)

**جواب :-** ۳ ف ق - ۴ ف ر - ۴ ق - ۲ ف ق ر - ۹ ر  
 (ر - ف ق)



۹ — مساوات

$$لا + ف لا + ق لا + ر لا + س =$$

کیلئے  $\frac{ع}{جہ}$  کی قیمت ف، ق، ر، س کی رقوم میں معلوم کرو۔

$$۔ یہاں  $\frac{ع}{جہ} + \frac{ع}{جہ} = \frac{۱}{ع}$$$

$$اور  $\frac{ع}{جہ} + ۴ = \frac{۱}{ع}$$$

جواب :-  $\frac{ق ر - ۲ ق س - ف ر س + ۴ س}{س}$

۱۰ — مساوات

$$لا + ب لا + ب لا + ..... + ب لا + ب لا + ب لا =$$

کی اصلوں کے تفاعل  $\frac{ع}{جہ}$  کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :-  $\frac{بن - ۱ بن - ۲ بن + ۱ بن - ۲ بن}{بن}$

۱۲ — کعبی مساوات

$$لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا =$$

کے سروں کی رقوم میں  $\frac{ع}{جہ}$  (۱ + ۱) (۱ + ۱) (۱ + ۱) کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :-  $\frac{۱۸}{۱} (۱ - ۱)$

۱۳ — مساوات

$$لا + ب لا + ب لا + ..... + ب لا + ب لا + ب لا =$$

کی اصلوں کے متشاکل تفاعل  $\frac{ع + ع}{ع + ع}$  کی قیمت معلوم کرو۔



$$1 - \left\{ \frac{1}{e_1} + \dots + \frac{1}{e_{n-1}} + \frac{1}{e_n} \right\}$$

$$1 - \left\{ \frac{1}{e_1} + \dots + \frac{1}{e_r} + \frac{1}{e_{r+1}} \right\} e_{r+1}$$

.....+

$$+ \{ \frac{1}{e_n} + \dots + \frac{1}{e_m} + \frac{1}{e_{m+1}} \} +$$

یا  $\Sigma$  عمر  $\frac{1}{n}$  - ن - پس و قس علی ہذا

(56) جواب :-  $\frac{ب \times ب \times ن - ا - ن}{ب \times ن}$

۱۴ — مساوات

$$\sqrt{t - e_2} + \sqrt{t - e_1} + \sqrt{t - e_2} = 0$$

بات - عہد + بات - بہ + بات - جہ =  
کو منطق شکل میں لاؤ اور ت میں حاصل ہونیوالی مساوات کے سروں کو  
کبھی مساوات مثال (۱) کے سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

جواب :- ۳ تہ ۲ (ف۲ - ق۲) تہ ۴ (ف۴ - ق۴) تہ ۵ (ف۵ - ق۵) تہ ۶ (ف۶ - ق۶) تہ ۷ (ف۷ - ق۷) تہ ۸ (ف۸ - ق۸) تہ ۹ (ف۹ - ق۹) تہ ۱۰ (ف۱۰ - ق۱۰) تہ ۱۱ (ف۱۱ - ق۱۱) تہ ۱۲ (ف۱۲ - ق۱۲) تہ ۱۳ (ف۱۳ - ق۱۳) تہ ۱۴ (ف۱۴ - ق۱۴) تہ ۱۵ (ف۱۵ - ق۱۵) تہ ۱۶ (ف۱۶ - ق۱۶) تہ ۱۷ (ف۱۷ - ق۱۷) تہ ۱۸ (ف۱۸ - ق۱۸) تہ ۱۹ (ف۱۹ - ق۱۹) تہ ۲۰ (ف۲۰ - ق۲۰) تہ ۲۱ (ف۲۱ - ق۲۱) تہ ۲۲ (ف۲۲ - ق۲۲) تہ ۲۳ (ف۲۳ - ق۲۳) تہ ۲۴ (ف۲۴ - ق۲۴) تہ ۲۵ (ف۲۵ - ق۲۵) تہ ۲۶ (ف۲۶ - ق۲۶) تہ ۲۷ (ف۲۷ - ق۲۷) تہ ۲۸ (ف۲۸ - ق۲۸) تہ ۲۹ (ف۲۹ - ق۲۹) تہ ۳۰ (ف۳۰ - ق۳۰) تہ ۳۱ (ف۳۱ - ق۳۱) تہ ۳۲ (ف۳۲ - ق۳۲) تہ ۳۳ (ف۳۳ - ق۳۳) تہ ۳۴ (ف۳۴ - ق۳۴) تہ ۳۵ (ف۳۵ - ق۳۵) تہ ۳۶ (ف۳۶ - ق۳۶) تہ ۳۷ (ف۳۷ - ق۳۷) تہ ۳۸ (ف۳۸ - ق۳۸) تہ ۳۹ (ف۳۹ - ق۳۹) تہ ۴۰ (ف۴۰ - ق۴۰) تہ ۴۱ (ف۴۱ - ق۴۱) تہ ۴۲ (ف۴۲ - ق۴۲) تہ ۴۳ (ف۴۳ - ق۴۳) تہ ۴۴ (ف۴۴ - ق۴۴) تہ ۴۵ (ف۴۵ - ق۴۵) تہ ۴۶ (ف۴۶ - ق۴۶) تہ ۴۷ (ف۴۷ - ق۴۷) تہ ۴۸ (ف۴۸ - ق۴۸) تہ ۴۹ (ف۴۹ - ق۴۹) تہ ۵۰ (ف۵۰ - ق۵۰) تہ ۵۱ (ف۵۱ - ق۵۱) تہ ۵۲ (ف۵۲ - ق۵۲) تہ ۵۳ (ف۵۳ - ق۵۳) تہ ۵۴ (ف۵۴ - ق۵۴) تہ ۵۵ (ف۵۵ - ق۵۵) تہ ۵۶ (ف۵۶ - ق۵۶) تہ ۵۷ (ف۵۷ - ق۵۷) تہ ۵۸ (ف۵۸ - ق۵۸) تہ ۵۹ (ف۵۹ - ق۵۹) تہ ۶۰ (ف۶۰ - ق۶۰) تہ ۶۱ (ف۶۱ - ق۶۱) تہ ۶۲ (ف۶۲ - ق۶۲) تہ ۶۳ (ف۶۳ - ق۶۳) تہ ۶۴ (ف۶۴ - ق۶۴) تہ ۶۵ (ف۶۵ - ق۶۵) تہ ۶۶ (ف۶۶ - ق۶۶) تہ ۶۷ (ف۶۷ - ق۶۷) تہ ۶۸ (ف۶۸ - ق۶۸) تہ ۶۹ (ف۶۹ - ق۶۹) تہ ۷۰ (ف۷۰ - ق۷۰) تہ ۷۱ (ف۷۱ - ق۷۱) تہ ۷۲ (ف۷۲ - ق۷۲) تہ ۷۳ (ف۷۳ - ق۷۳) تہ ۷۴ (ف۷۴ - ق۷۴) تہ ۷۵ (ف۷۵ - ق۷۵) تہ ۷۶ (ف۷۶ - ق۷۶) تہ ۷۷ (ف۷۷ - ق۷۷) تہ ۷۸ (ف۷۸ - ق۷۸) تہ ۷۹ (ف۷۹ - ق۷۹) تہ ۸۰ (ف۸۰ - ق۸۰) تہ ۸۱ (ف۸۱ - ق۸۱) تہ ۸۲ (ف۸۲ - ق۸۲) تہ ۸۳ (ف۸۳ - ق۸۳) تہ ۸۴ (ف۸۴ - ق۸۴) تہ ۸۵ (ف۸۵ - ق۸۵) تہ ۸۶ (ف۸۶ - ق۸۶) تہ ۸۷ (ف۸۷ - ق۸۷) تہ ۸۸ (ف۸۸ - ق۸۸) تہ ۸۹ (ف۸۹ - ق۸۹) تہ ۹۰ (ف۹۰ - ق۹۰) تہ ۹۱ (ف۹۱ - ق۹۱) تہ ۹۲ (ف۹۲ - ق۹۲) تہ ۹۳ (ف۹۳ - ق۹۳) تہ ۹۴ (ف۹۴ - ق۹۴) تہ ۹۵ (ف۹۵ - ق۹۵) تہ ۹۶ (ف۹۶ - ق۹۶) تہ ۹۷ (ف۹۷ - ق۹۷) تہ ۹۸ (ف۹۸ - ق۹۸) تہ ۹۹ (ف۹۹ - ق۹۹) تہ ۱۰۰ (ف۱۰۰ - ق۱۰۰) تہ ۱۰۱ (ف۱۰۱ - ق۱۰۱) تہ ۱۰۲ (ف۱۰۲ - ق۱۰۲) تہ ۱۰۳ (ف۱۰۳ - ق۱۰۳) تہ ۱۰۴ (ف۱۰۴ - ق۱۰۴) تہ ۱۰۵ (ف۱۰۵ - ق۱۰۵) تہ ۱۰۶ (ف۱۰۶ - ق۱۰۶) تہ ۱۰۷ (ف۱۰۷ - ق۱۰۷) تہ ۱۰۸ (ف۱۰۸ - ق۱۰۸) تہ ۱۰۹ (ف۱۰۹ - ق۱۰۹) تہ ۱۱۰ (ف۱۱۰ - ق۱۱۰) تہ ۱۱۱ (ف۱۱۱ - ق۱۱۱) تہ ۱۱۲ (ف۱۱۲ - ق۱۱۲) تہ ۱۱۳ (ف۱۱۳ - ق۱۱۳) تہ ۱۱۴ (ف۱۱۴ - ق۱۱۴) تہ ۱۱۵ (ف۱۱۵ - ق۱۱۵) تہ ۱۱۶ (ف۱۱۶ - ق۱۱۶) تہ ۱۱۷ (ف۱۱۷ - ق۱۱۷) تہ ۱۱۸ (ف۱۱۸ - ق۱۱۸) تہ ۱۱۹ (ف۱۱۹ - ق۱۱۹) تہ ۱۲۰ (ف۱۲۰ - ق۱۲۰) تہ ۱۲۱ (ف۱۲۱ - ق۱۲۱) تہ ۱۲۲ (ف۱۲۲ - ق۱۲۲) تہ ۱۲۳ (ف۱۲۳ - ق۱۲۳) تہ ۱۲۴ (ف۱۲۴ - ق۱۲۴) تہ ۱۲۵ (ف۱۲۵ - ق۱۲۵) تہ ۱۲۶ (ف۱۲۶ - ق۱۲۶) تہ ۱۲۷ (ف۱۲۷ - ق۱۲۷) تہ ۱۲۸ (ف۱۲۸ - ق۱۲۸) تہ ۱۲۹ (ف۱۲۹ - ق۱۲۹) تہ ۱۳۰ (ف۱۳۰ - ق۱۳۰) تہ ۱۳۱ (ف۱۳۱ - ق۱۳۱) تہ ۱۳۲ (ف۱۳۲ - ق۱۳۲) تہ ۱۳۳ (ف۱۳۳ - ق۱۳۳) تہ ۱۳۴ (ف۱۳۴ - ق۱۳۴) تہ ۱۳۵ (ف۱۳۵ - ق۱۳۵) تہ ۱۳۶ (ف۱۳۶ - ق۱۳۶) تہ ۱۳۷ (ف۱۳۷ - ق۱۳۷) تہ ۱۳۸ (ف۱۳۸ - ق۱۳۸) تہ ۱۳۹ (ف۱۳۹ - ق۱۳۹) تہ ۱۴۰ (ف۱۴۰ - ق۱۴۰) تہ ۱۴۱ (ف۱۴۱ - ق۱۴۱) تہ ۱۴۲ (ف۱۴۲ - ق۱۴۲) تہ ۱۴۳ (ف۱۴۳ - ق۱۴۳) تہ ۱۴۴ (ف۱۴۴ - ق۱۴۴) تہ ۱۴۵ (ف۱۴۵ - ق۱۴۵) تہ ۱۴۶ (ف۱۴۶ - ق۱۴۶) تہ ۱۴۷ (ف۱۴۷ - ق۱۴۷) تہ ۱۴۸ (ف۱۴۸ - ق۱۴۸) تہ ۱۴۹ (ف۱۴۹ - ق۱۴۹) تہ ۱۵۰ (ف۱۵۰ - ق۱۵۰) تہ ۱۵۱ (ف۱۵۱ - ق۱۵۱) تہ ۱۵۲ (ف۱۵۲ - ق۱۵۲) تہ ۱۵۳ (ف۱۵۳ - ق۱۵۳) تہ ۱۵۴ (ف۱۵۴ - ق۱۵۴) تہ ۱۵۵ (ف۱۵۵ - ق۱۵۵) تہ ۱۵۶ (ف۱۵۶ - ق۱۵۶) تہ ۱۵۷ (ف۱۵۷ - ق۱۵۷) تہ ۱۵۸ (ف۱۵۸ - ق۱۵۸) تہ ۱۵۹ (ف۱۵۹ - ق۱۵۹) تہ ۱۶۰ (ف۱۶۰ - ق۱۶۰) تہ ۱۶۱ (ف۱۶۱ - ق۱۶۱) تہ ۱۶۲ (ف۱۶۲ - ق۱۶۲) تہ ۱۶۳ (ف۱۶۳ - ق۱۶۳) تہ ۱۶۴ (ف۱۶۴ - ق۱۶۴) تہ ۱۶۵ (ف۱۶۵ - ق۱۶۵) تہ ۱۶۶ (ف۱۶۶ - ق۱۶۶) تہ ۱۶۷ (ف۱۶۷ - ق۱۶۷) تہ ۱۶۸ (ف۱۶۸ - ق۱۶۸) تہ ۱۶۹ (ف۱۶۹ - ق۱۶۹) تہ ۱۷۰ (ف۱۷۰ - ق۱۷۰) تہ ۱۷۱ (ف۱۷۱ - ق۱۷۱) تہ ۱۷۲ (ف۱۷۲ - ق۱۷۲) تہ ۱۷۳ (ف۱۷۳ - ق۱۷۳) تہ ۱۷۴ (ف۱۷۴ - ق۱۷۴) تہ ۱۷۵ (ف۱۷۵ - ق۱۷۵) تہ ۱۷۶ (ف۱۷۶ - ق۱۷۶) تہ ۱۷۷ (ف۱۷۷ - ق۱۷۷) تہ ۱۷۸ (ف۱۷۸ - ق۱۷۸) تہ ۱۷۹ (ف۱۷۹ - ق۱۷۹) تہ ۱۸۰ (ف۱۸۰ - ق۱۸۰) تہ ۱۸۱ (ف۱۸۱ - ق۱۸۱) تہ ۱۸۲ (ف۱۸۲ - ق۱۸۲) تہ ۱۸۳ (ف۱۸۳ - ق۱۸۳) تہ ۱

- ۸ ف ر = -

۱۵۔ اگر مثال (۶) کے چار درجہ کی اصلیں عہ، یہ، جہ، ضہ ہوں تو ثابت کر دو۔

$$(ع + ا) (ی + ا) (ج + ا) (ض + ا) = (ا - ق + س) (ف - ر)$$

مسادات لائن  $1 = 0$  کی ہر اصل کو باری باری سے دفعہ ۱۶ کی مسادات متماثلہ

میں درج کرو اور ضرب دو۔

۱۶۔ ان میں درجہ کی عام مساوات کی اصلوں اور سروں کے درمیان ربط

ذیل ثابت کرو :-

$$^2(\dots + \text{ب} - \text{ب}) + ^2(\dots - \text{ب} + \text{ب} - 1) = (1 + \text{ع}^2) \dots (1 + \text{ع}^2)(1 + \text{ع}^2)$$



۱۷ — (عہ + ۲) (بہ + ۲) (جہ + ۲) (ضہ + ۲)  
کی عددی قیمت معلوم کرو جہاں عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات  
لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ = ۰

کی اصلیں ہیں۔

۱۸ — اگر عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات

لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ = ۰

کی اصلیں ہوں تو ثابت کرو کہ

لا۔ ۷ (بہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + بہ) (بہ + ضہ) (ضہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + ضہ)

= ۱۶ { لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ - لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ }

زیر بحث متشاکل تفاعل (مہ + نہ) (نہ + لہ) (لہ + مہ) یا ۳ لہ ۳ مہ نہ - لہ نہ

کے مساوی ہے جہاں لہ، مہ، نہ کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۲، مثال ۷ میں دی گئی تھیں۔

۱۹ — مثال ۹ کی چار درجہ مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعل ۳ (عہ - بہ)

کی قیمت محسوب کرو۔

جواب :- ۳ ف - ۱۶ ف + ۲۰ ق + ۲ ف - ۱۶ ر - ۱۶ س

۲۰ — ثابت کرو کہ جب چار درجہ کوثنای سروں کے ساتھ لکھا جائے جیسا کہ

مثال ۱۸ میں لکھا گیا ہے تو مثال ۱۸ کے متشاکل تفاعل کی قیمت شکل ذیل میں لکھی

جاسکتی ہے :-

لا۔ ۷ (عہ - بہ) = ۱۶ { لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ - لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ }

۲۱ — ایک خط مستقیم پر نقطوں کے دو زوجوں کے فاصلے ایک ثابت مبداء

سے جو اسی خط میں واقع ہے درجہ دوم کی مساواتوں

لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ = ۰، لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ = ۰

کی اصلوں (عہ، بہ) اور (عہ، بہ) کے مساوی ہیں۔ اگر ایک زوج کے نقطے دوسرے

زوج کے موسیقی مزدوج نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ ذیل کا ربط موجود ہے :-

لا۔ ۷ لا۔ ۸ لا۔ ۵ لا۔ ۱۰ = ۰

۲۲ — ایک خط پر کے تین نقطوں (ب، ج) کے فاصلے اسی خط پر کے



ایک ثابت مبداء سے مساوات

(57)  $1\text{ لا}^2 + 3\text{ ب لا}^2 + 3\text{ ج لا} + د = 0$   
 کی اصلوں کے مساوی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں (ب، ج) میں سے ایک نقطہ باقی دو نقطوں کے درمیانی فاصلے کی تصحیف کرے۔  
 دفعہ ۲ کی مثال ۱۵ سے مقابلہ کرو۔

جواب :-  $1\text{ د} - 3\text{ ب ج} + 2\text{ ب}^2 = 0$

۲۳۔ سوال گذشتہ کی ترقیم کو قائم رکھو اور وہ شرط معلوم کرو کہ نقطوں (ب، ج) سے ایک موسیقی تقسیم بنے۔

جواب :-  $1\text{ د}^2 - 3\text{ ب ج د} + 2\text{ ج}^2 = 0$

اسکو مثال ۲۲ کے نتیجے سے اخذ کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ اصلوں کو ان کے متکافیوں میں بدلا جائے۔ یا اسکو بہ آسانی آزادانہ محسوب کیا جاسکتا ہے۔  
 اگر مساوات

$$1\text{ لا}^2 + 4\text{ ب لا}^2 + 6\text{ ج لا} + 4\text{ د لا} + ع = 0$$

کی اصلوں ع، ب، ج، ضہ میں ایسا ربط ہو کہ ع - ضہ، ب - ضہ، ج - ضہ سلسلہ موسیقی میں ہیں تو ثابت کرو کہ

$$1\text{ ج ع} + 2\text{ ب ج د} - 1\text{ د} - 3\text{ ب ع} - ج^2 = 0$$

دفعہ ۲ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۲۵۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$\frac{\text{ب ج} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ ا عہ بہ}}{\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ ا جہ}} = \frac{\text{بہ جہ} + \text{سہ جہ عہ} + \text{سہ ا جہ عہ}}{\text{عہ} + \text{سہ بہ} + \text{سہ ا جہ}}$$

ہوں جہاں  $\text{سہ}^2 = 1\text{ اور عہ، بہ، جہ کبھی مساوات}$

$$1\text{ لا}^2 + 3\text{ ب لا}^2 + 3\text{ ج لا} + د = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ جواب :-  $(1\text{ ج} - 3\text{ ب لا}^2 + 3\text{ ج لا} + د - 3\text{ ب ج}) + (1\text{ ج} - 3\text{ ب ج}) = 0$   
 دفعہ ۲ کی مثالوں ۱۳ اور ۱۴ سے مقابلہ کرو۔

$$26 - (2\text{ ب جہ} - \text{جہ عہ} - \text{عہ بہ}) (2\text{ جہ عہ} - \text{عہ بہ} - \text{بہ جہ}) (2\text{ عہ بہ} - \text{بہ جہ} - \text{جہ عہ})$$



کو دو مکعبوں کے حاصل جمع میں لکھو۔ **جواب:**۔ (بہ جہ + سہ جہ عہ + سہ عہ بیہ) + (بہ جہ + سہ جہ عہ + سہ عہ بیہ)۔

دفعہ ۲۶ مثال ۵ سے مقابلہ کرو۔

۲۷۔ (لا + ما + ی) + (لا + سہ ما + سہ ی) + (لا + سہ ما + سہ ی) کو لا + ما + ی اور لا ما ی کی رقوم میں بیان کرو جہاں سہ = ۱۔

**جواب:**۔ ۳ (لا + ما + ی) + ۱۸ لا ما ی

۲۸۔ اگر

(لا + ما + ی - ۳ لا ما ی) (لا + ما + ی - ۳ لا ما ی) = لا + ما + ی - ۳ لا ما ی  
تو لا + ما + ی کو لا، ما، ی، لا، ما، ی کی رقوم میں معلوم کرو۔  
دفعہ ۲۶ کی مثال ۴ کا استعمال کرو۔

**جواب:**۔ لا = لا + لا + ما + ی کی ما = لا + ما + ی + لا  
ے = لا ی + ما لا + ی ما

۲۹۔ (عہ + بہ + جہ) عہ بہ جہ۔ (بہ جہ + جہ عہ + عہ بہ) کو تین اجزائے ضربی میں تحویل کرو جنہیں سے ہر ایک عہ، بہ، جہ میں دوسرے درجہ کا جملہ ہو۔

**جواب:**۔ (عہ - بہ جہ) (بہ - جہ عہ) (جہ - عہ بہ)

دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ سے مقابلہ کرو۔

۳۰۔ حسب ذیل جملوں کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کرو۔

(۱) (بہ - جہ) (بہ + جہ - ۲ عہ) + (جہ - عہ) (جہ + عہ - ۲ بہ) + (عہ - بیہ) (عہ + بیہ - ۲ جہ)

(۲) (بہ - جہ) (بہ + جہ - ۲ عہ) + (جہ - عہ) (جہ + عہ - ۲ بہ) + (عہ - بیہ) (عہ + بیہ - ۲ جہ)

**جواب:**۔ (۱) (۲ عہ - بہ - جہ) (۲ بہ - جہ - عہ) (۲ جہ - عہ - بیہ)

(۲) (۲ عہ - بہ - جہ) (۲ بہ - جہ - عہ) (۲ جہ - عہ - بیہ)

۳۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

لا - ف لا + ق لا - ر = ۰

کی اصلوں کا ایک زوج شکل ۱ ± ۱ - ۱ میں ہو۔ ایسی صورت میں اصلوں کو کس طرح



معلوم کیا جاسکتا ہے۔  
 اگر حقیقی اصل ب ہو تو اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ لینے سے بہ آسانی  $f^2 - 2q$   
 $= b^2$  حاصل ہوگا۔ مطلوبہ شرط ہوگی  
 $(f^2 - 2q)(q^2 - 2f) = r^2$

۳۲ — مساوات

$f^2 - 2q + 2a - 2b = 2r^2$   
 کو حل کرو جسکی اصلیں مثال ۳۱ میں بیان کردہ شکل کی ہیں۔  
 جواب:  $2^2 - 2 \pm 2^2 - 2$

۳۳ — وہ شرطیں معلوم کرو کہ چار درجہ مساوات

$f^2 - 2q + 2a - 2b = r^2$   
 کی اصلیں شکل  $f^2 - 2q + 2a - 2b = r^2$  کی ہوں۔ یہاں سروں کے  
 درمیان دو شرطیں ہونی چاہئیں کیونکہ اصلوں میں صرف دو مجہول مقادیر شامل ہیں۔  
 جواب:  $f^2 - 2q = r^2$ ،  $2a - 2b = r^2$

۳۴ — مساوات

$f^2 - 2q + 2a - 2b = r^2$   
 کو حل کرو جسکی اصلیں مثال ۳۳ میں بیان کردہ شکل کی ہیں۔  
 جواب:  $3^2 - 2 \pm 3^2 - 2$ ،  $5^2 - 2 \pm 5^2 - 2$

۳۵ — اگر مساوات

$f^2 - 2q + 2a - 2b = r^2$   
 کی ایک اصل  $e + b = f$  ہو تو ثابت کرو کہ مساوات  
 $f^2 - 2q + 2a - 2b = r^2$

کی ایک اصل  $e + b$  ہوگی۔  
 ۳۶ — وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات

$f^2 - 2q + 2a - 2b = r^2$   
 کی دو اصلوں  $e + b$  میں ربط  $e + b = 1$  موجود ہو۔



(59)

جواب :-  $۱ + ق + ف + ر + ر' =$

۳۷ - وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجہ مساوات

$$لا + ف لا + ق لا + ر لا + س =$$

کی دو اصلوں عہ بہ میں رابطہ عہ بہ  $۱ =$  موجود ہو۔

مطلوبہ شرط س کی قوتوں میں مرتبہ حسب ذیل ہے

$$۱ + ق + ف + ر + ر' + (ف + ف' + ر - ۲ ق - ۱) س + (ق - ۱) س' + س'' =$$

۳۸ - مساوات

$$لا + ب لا + ب' لا + \dots + ب^{n-2} لا + ب^{n-1} بن =$$

کی اصلوں کے تفاعل  $ح (ع - ع' - ع'' - \dots - ع^{n-1})$  کی قیمت معلوم کرو۔

اسکو بہ آسانی مثال ۱۳ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

جواب :-  $(۱ - ۱') \{ ب بن - ب' بن - \dots - ب^{n-1} بن \}$

۳۹ - اگر مساوات

$$۱ لا + ۱' لا + \dots + ۱^{n-1} لا + \frac{۱(۱ - ۱')}{۲ \times ۱} لا^{n-2} + \dots + ۱^{n-1} بن =$$

کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ انکو جملہ

$$- \frac{۱}{۱} \pm \frac{۱}{۱} \sqrt{\frac{۳(۱ - ۱')}{۱ + ۱}}$$

میں  $(ن$  جفت ہوتو) رکوا، ۳، ۵، ...،  $۲ن - ۱$  تمام قیمتیں دینے سے اور  $(ن$  طاق

ہوتو) ۲، ۴، ۶، ...،  $۲ن$  تمام قیمتیں دینے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۴۰ - تین مقداروں عہ، بہ، جہ کے فرقوں کو عہ، بہ، جہ سے تعبیر کیا جائے یعنی

$$عہ = ۱ - بہ، جہ = ۱ - عہ، جہ = ۱ - عہ$$

تو ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} عہ + بہ + جہ &= ۳ - عہ - بہ - جہ \\ عہ + بہ + جہ &= ۳ - عہ - بہ - جہ \end{aligned}$$



$$\text{عہ}^۱ + \text{بہ}^۱ + \text{جہ}^۱ = \frac{۵}{۲} = \{ \text{عہ}^۲ + \text{بہ}^۲ + \text{جہ}^۲ \} \text{عہ}^۱ + \text{بہ}^۱ + \text{جہ}^۱$$

اور

مساوات

$$\text{لا} + \text{ق} - \text{لا} = ۱ = ۰$$

کی اصلوں کو عہ<sup>۱</sup>، بہ<sup>۱</sup>، جہ<sup>۱</sup> لینے سے اور متشاکل تفاعلوں عہ<sup>۲</sup>، عہ<sup>۳</sup>، عہ<sup>۴</sup> کی قیستوں کو ق اور ر کی رقوم میں محسوب کرنے سے مطلوبہ نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں۔ (مساوات بالائیں دوسری رقم غائب ہے کیونکہ اصلوں کا مجموعہ = ۰)۔ اس عمل کی توسیع کیا جاسکتی ہے اور عہ<sup>۲</sup>، عہ<sup>۳</sup>، عہ<sup>۴</sup> وغیرہ کے لئے ضوابط معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ اسلئے متواتر قوتوں کے مجموعے حاصل ضرب عہ<sup>۱</sup> بہ<sup>۱</sup> جہ<sup>۱</sup> اور حاصل جمع عہ<sup>۲</sup> + بہ<sup>۲</sup> + جہ<sup>۲</sup> کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔ انہیں سے پہلا ر کے مساوی اور دوسرا - ۲ (بہ<sup>۱</sup> جہ<sup>۱</sup> + جہ<sup>۱</sup> بہ<sup>۱</sup> + عہ<sup>۱</sup> بہ<sup>۱</sup>) یعنی - ۲ ق کے مساوی ہے۔ ان مجموعوں کو طریقہ ذیل پر محسوب کیا جاسکتا ہے:-

مساوات لا<sup>۱</sup> = ر - ق لا اور اس کا مربع، مکعب وغیرہ لے کر حاصل ہونیوالی مساواتوں کی مدد سے اور لا<sup>۱</sup> یا لا<sup>۲</sup> سے ضرب دینے کے بعد لا کی کسی قوت کو مثلاً لا<sup>۱</sup> کو متواتر تھیلیوں کے ذریعہ شکل ۱ + ب لا + ج لا<sup>۲</sup> میں لایا جاسکتا ہے جہاں 'ا' ب' ج' تفاعل ہیں ق اور ر کے۔ پھر عہ<sup>۱</sup>، بہ<sup>۱</sup>، جہ<sup>۱</sup> کو مندرج کر کے جمع کرنے حاصل ہوگا عہ<sup>۲</sup> = ۳ - ۲ ق ج -

طالب علم مشق کے طور پر اسی طریقہ سے عہ<sup>۲</sup> = ۲ ق ر - عہ<sup>۳</sup> = ۱۱ ق ر - عہ<sup>۴</sup> (ر)

کو ثابت کر سکتا ہے۔



# پوٹھاباب

## مساواتوں کا استحالة

(60)

۲۹۔ مساواتوں کا استحالة۔ بہت سی مثالوں میں کسی مساوات کی

اصولوں کی قیمتیں، سروں کی رقوم میں معلوم کئے بغیر ہم اسکو معمولی اندراجات کے ذریعہ یا اصولوں کے متشاکل تفاعلوں کی مدد سے دوسری ایسی مساوات میں تحویل کر سکتے ہیں، جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے ساتھ مقررہ روابط رکھتی ہوں۔ اس قسم کے استحالة سے مساوات کی اصولوں وغیرہ پر بحث کرنے میں بڑی مدد ملتی ہے۔ اب ہم اہم ترین ابتدائی استحالوں کی تشریح کریں گے۔

۳۔ اصلیں بہ تبدیل علامت۔ ایک مساوات کو دوسری

مساوات میں تحویل کرنے کے لئے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے مساوی مگر مختلف علامت ہوں فرض کرو کہ مساوات

$$لا + ب - لا - ۱ + ب - لا - ۲ + ..... + ب - لا + ب = ۰$$

کی اصلیں عم، عم، عم، عم، ..... عن ہیں۔ تب ہمیں مساوات متماثل ملیگی



اس لئے ما کے اس کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ایسی مساوات  
ملیگی جسکی اصلیں ہونگی۔ عم، - عم، - عم، ..... عین۔ اس لئے مطلوبہ  
استحالہ حاصل کرنے کے لئے دی ہوئی مساوات کی دوسری چوتھی چھٹی  
وغیرہ رقموں کی صرف علامتیں بدلنی چاہئیں۔

## مثالیں

$$= 1 + \psi + \psi^2 + \psi^3 + \psi^4 + \psi^5 + \psi^6 + \psi^7 + \psi^8 + \psi^9 + \psi^{10} + \psi^{11} + \psi^{12} + \psi^{13} + \psi^{14} + \psi^{15}$$

کئی اصلیں بہ تبدیل علامت ہوں۔

جواب :-  $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + 7x^6 - 8x^7 + 9x^8 - 10x^9 + \dots$

۲ — مساوات

$$= 2 + 16 + 2 - 2 + 5 + 1$$

کی اصلوں کی علامتیں تبدیل کرو۔

(غیر موجود رقموں کو صفر سر کے ساتھ مساوات میں داخل کرو)۔

جواب :-  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100$

۳۱۔ دی ہوئی مقدار سے اصلوں کو ضرب دینا۔ اگر ایک

مساوات کو جسکی اصلیں عم، عم، عم، ..... عم ہیں دوسری ایسی مساواتیں



تحويل کرنا ہو جسکی اصلیں م عم، م عم، م عم، م عم ہوں تو دفعہ ماسبق کی مثالہ میں لا کی بجائے م۔ درج کرو۔ پھر اسکو م سے ضرب دو تو

$$م + م ب م + م ب م + \dots + م ب م + م ب م$$

$$\equiv (م - م عم) (م - م عم) \dots (م - م عم)$$

پس مساوات کی اصلوں کو دی ہوئی مقدار م سے ضرب دیتا ہو تو متواتر

سروں کو دوسری رقم سے شروع کر کے علی الترتیب م، م، م، م، م سے ضرب دینا چاہیے

یہ تحويل اسوقت کارآمد ہوتی ہے جب دی ہوئی مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک نہ ہو اور اسکو ایک بنانا مطلوب ہو اور عام طور پر اس تحويل کو مساوات سے کسری سروں کو دور کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر پہلی رقم کا سر ۱ ہو تو ہم اسی مساوات بناتے ہیں جسکی اصلیں م عم، م عم، م عم، م عم ہوں یہ تحويل شدہ مساوات ۱ سے پوری طرح تقسیم ہو جائیگی اور ایسی تقسیم عمل میں لانیکے بعد لا کا سر ایک ہو جائیگا۔

جب کچھ سر کسری ہوں تو کسروں کے تمام نسب نماؤں کا ذواضفاف اقل م معلوم کرو اور مساوات کی اصلوں کو مقدار م سے ضرب دو تو وہ مساوات یلگی جو کسروں سے آزاد ہوگی۔ بہت سی صورتوں میں ذواضفاف اقل سے چھوٹی مقدار سے ضرب دینا اس مقصد کے لئے کافی ہوگا جیسا کہ ذیل کی مثالوں سے ظاہر ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$۳ لا - ۴ لا + ۴ لا - ۲ لا + ۱ = ۰$$



کو ایسی مساوات میں تحویل کر دیجی بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔

ہم اصلوں کو ۳ سے ضرب دیتے ہیں۔

جواب :-  $0 = 24 + 18\lambda - 12\lambda^2 + 4\lambda^3$

۲ — مساوات

$$0 = 1 - \lambda + \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda^3$$

سے کسری سر دور کرو۔

جواب :-  $0 = 212 - 24\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3$  اصلوں کو ۶ سے ضرب دو۔

(62)

۳ — مساوات

$$0 = \frac{1}{108} + \frac{4}{18}\lambda - \frac{5}{4}\lambda^2 - \lambda^3$$

سے کسری سر دور کرو۔  
ان کسروں کے نسب ناموں کے اجزائے ضربی پر غور کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ ان کے ذواضعاف اقل سے بہت چھوٹا عدد کسروں کو دور کرنے کے لئے کافی ہے۔ اگر مطلوبہ ضرب دیتے والا عدد م ہو تو تحویل شدہ مساوات لکھی جائیگی

$$0 = \frac{1}{2 \times 3} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{2 \times 3} \lambda - \frac{5}{2 \times 3} \lambda^2 - \lambda^3$$

اب یہ ظاہر ہے کہ اگر م کو ۶ کے مساوی لیا جائے تو ہر سر صحیح عدد بن جائیگا۔  
پس صرف ۶ سے ضرب دینا ہوگا۔

جواب :-  $0 = 2 + 12\lambda - 15\lambda^2 + 2\lambda^3$

۴ — مساوات

$$0 = \frac{44}{1000} + \frac{13}{25}\lambda + \frac{3}{10}\lambda^2 + \lambda^3$$

سے کسری سر دور کرو۔

اس قسم کی مثالوں میں طالب علم کو چاہئے کہ غیر موجود رقموں کو صفر سروں کے ساتھ مساوات میں داخل کرے۔ مطلوبہ ضرب ۱۰ ہے۔

جواب :-  $0 = 440 + 520\lambda + 30\lambda^2 + \lambda^3$



۵۔ مساوات

$$لا - \frac{۵}{۶} لا^۲ + \frac{۵}{۱۲} لا^۳ - \frac{۱۳}{۹۰۰} =$$

سے کسری سر دور کرو۔

جواب :- لا - لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ = ۱۱۴۰۰۔

۳۲۔ متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں۔ اگر ایک مساوات کو

دوسری ایسی مساوات میں تحویل کرنا ہو جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متکافی ہوں تو ہم دفعہ ۳۰ کی مثالہ میں لا کی بجائے  $\frac{۱}{۲}$  درج کرتے ہیں۔ اس اندراج سے حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱-۲} + \dots + \frac{۱}{۱-۱۱۴۰۰} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱-۲} + \dots + \frac{۱}{۱-۱۱۴۰۰}$$

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱-۲} + \dots + \frac{۱}{۱-۱۱۴۰۰} = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱-۱} + \frac{۱}{۱-۲} + \dots + \frac{۱}{۱-۱۱۴۰۰}$$

$$= \left( \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱-۱} \right) \left( \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱-۲} \right) \dots \left( \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱-۱۱۴۰۰} \right)$$

پس اگر دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے  $\frac{۱}{۲}$  درج کیا جائے اور اسکو مان سے ضرب دیا جائے تو حاصل کثیر الارقام کو صفر کے مساوی رکھنے سے وہ مساوات ملیگی جسکی اصلیں 'عم'، 'عم'، 'عم'، 'عم' کے متکافی ہونگی۔

بعض مساواتیں ایسی ہوتی ہیں جنہیں لا کی بجائے اسکا متکافی درج

کرنے سے انہیں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا۔ انکو ہم متکافی مساواتیں کہینگے۔



ابھی ہم نے جو اوپر ثابت کیا ہے اُس سے ظاہر ہے کہ اس جماعت سے متعلق مساوات شرائط ذیل کو پورا کریگی :-

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_3}{b_4}$ ،  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_3}{b_4}$  وغیرہ  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_3}{b_4}$ ،  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_3}{b_4}$ ۔  
انہیں سے آخری شرط سے حاصل ہوگا  $b_1 = a$  یعنی  $b_1 = a$ ۔  
اسلئے متکافی مساواتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایک جماعت وہ  
جسمیں  $b_1 = a$  اور دوسری وہ جس میں  $b_1 = -a$ ۔  
(۱) پہلی صورت میں روابط ہونگے

$b_1 = a$ ،  $b_2 = b$ ،  $b_3 = b$ ،  $b_4 = b$ ۔

ان سے پہلی جماعت کی متکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنہیں ابتدا اور آخر سے  
لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقدار میں مساوی اور ہم علامت ہونگے۔  
(۲) دوسری صورت میں یعنی جبکہ  $b_1 = -a$  روابط ہونگے

$b_1 = -a$ ،  $b_2 = b$ ،  $b_3 = b$ ،  $b_4 = b$ ۔

ان سے دوسری جماعت کی متکافی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جنہیں ابتدا اور آخر سے  
لی ہوئی متناظر رقموں کے سر مقدار میں مساوی مگر مختلف علامت ہونگے۔ یہاں  
یہ بات یاد رہے کہ جب اس جماعت کی کسی مساوات کا درجہ جفت ہو مثلاً  
 $n = 2$  تو ایک شرط ہو جائیگی  $b_1 = b_2$  یعنی  $b_1 = b_2$ ۔ اس لئے دوسری  
جماعت کی متکافی مساوات میں جس کا درجہ جفت ہو درمیانی رقم نہیں ہوتی۔

اگر متکافی مساوات کی ایک اصل عہ ہو تو  $\frac{a}{b}$  بھی اسکی ایک اصل  
ہونی چاہئے کیونکہ یہ استحالہ شدہ مساوات کی اصل ہے اور استحالہ شدہ مساوات  
دی ہوئی مساوات کے مماثل ہے۔ پس متکافی مساوات کی اصلیں زوجوں  
عہ  $\frac{a}{b}$ ،  $\frac{a}{b}$  وغیرہ میں واقع ہوتی ہیں۔ جب مساوات کا درجہ طاق ہو تو



ایک اصل ایسی ہونی چاہئے جو خود اپنی متکافی ہو اور مساوات کی شکل سے یہ ظاہر ہے کہ - ایا + ا ایسی صورت میں ایک اصل ہوگی جو جب اسکے کہ مساوات پہلی جماعت سے یا دوسری جماعت سے متعلق ہو - دونوں صورتوں میں ہم معلومہ جزو ضربی (لا + ا یا لا - ا) سے تقسیم کر سکتے ہیں اور عمل تقسیم سے جفت درجہ کی متکافی مساوات حاصل ہوگی جو پہلی جماعت سے متعلق ہوگی دوسری جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں لا<sup>۲</sup> - ا جزو ضربی ہوگا کیونکہ مساوات کو شکل

$$\text{لا}^۲ - ا + ب \text{ لا} ( \text{لا}^۲ - ا ) + \dots = ۰$$

میں لکھا جاسکتا ہے -  
لا<sup>۲</sup> - ا سے تقسیم کرنے سے اسکو بھی پہلی جماعت کی جفت درجہ کی متکافی مساوات میں تحویل کیا جاسکتا ہے - پس تمام متکافی مساواتوں کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساواتوں میں تحویل کیا جاسکتا ہے -  
اور اسلئے پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات کو معیاری مساوات قرار دیا جاسکتا ہے -

## مثالیں

۱ - وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا}^۲ - ۳ \text{ لا}^۲ + ۷ \text{ لا}^۲ - ۵ \text{ لا} - ۲ = ۰$$

کی اصلوں کے متکافی ہوں -

جواب: -  $\text{لا}^۲ - ۵ \text{ لا} - ۲ = ۰$   $\text{لا}^۲ + ۳ \text{ لا} - ۱ = ۰$

$$۲ - \text{لا}^۲ + \frac{۵}{۲} \text{ لا} - \frac{۲۲}{۲} \text{ لا} + \frac{۲۲}{۲} \text{ لا} - \frac{۵}{۲} \text{ لا} - ۱ = ۰$$

کو پہلی جماعت کی جفت درجہ کی مساوات میں تحویل کرو -

۳۳ - اصلوں کو بقدر ایک ہی ہونی مقدار کے گھٹانا یا بڑھانا -



اس قسم کے استحالہ کیلئے ہم کثیر الارقام ف (لا) کے متغیر لا کو ما + ہ میں بدل دیتے ہیں۔ ما میں محصلہ مساوات کی ہر اصل دی ہوئی لا کی مساوات کی ہر اصل سے چھوٹی یا بڑی ہوگی بموجب اسکے کہ ہ مثبت یا منفی ہو۔ محصلہ مساوات ہوگی (دیکھو دفعہ ۱۰)

$$ف (ہ) + ف (ہ) + \frac{ف (ہ)}{۲ \times ۱} + \dots + \dots$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ مشتق تفاعلوں کو راست محسوب کر کے انہیں دی ہوئی مقدار ہ درج کرنا محنت طلب امر ہے۔ اسلئے ہم اس مساوات کو بنائیکا ایک آسان طریقہ بیان کرتے ہیں جو عملی مقاصد کیلئے زیادہ کار آمد و سہولت بخش ہے۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

$$۱. لا + ۱. لا - ۱. لا + ۱. لا - ۱. لا + \dots + ۱. لا - ۱. لا + ۱. لا = ۰$$

(65)

اور فرض کرو کہ ما میں تحویل شدہ کثیر الارقام ہے

$$۱. ما + ۱. ما - ۱. ما + ۱. ما - ۱. ما + \dots + ۱. ما - ۱. ما + ۱. ما = ۰$$

اب چونکہ ما = لا - ہ اسلئے یہ کثیر الارقام

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + \dots + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) = ۰$$

کے مماثل ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر دئے ہوئے کثیر الارقام کو لا - ہ سے تقسیم کیا جائے تو باقی ۱. ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + \dots + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) = ۱. - ۱.$$

اگر اسکو پھر لا - ہ سے تقسیم کیا جائے تو باقی ۱. ہوگا اور خارج قسمت ہوگا

$$۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + \dots + ۱. (لا - ہ) - ۱. (لا - ہ) + ۱. (لا - ہ) = ۱. - ۱.$$



اس عمل کو جاری رکھ کر ہم معمولی حسابی اعمال کی تکرار سے (جو دفعہ ۸ میں بیان ہوئے ہیں) تحویل شدہ مساوات کے سروں  $ل_۱$ ،  $ل_۲$ ،  $ل_۳$ ،  $ل_۴$  وغیرہ کی قیمتیں یکے بعد دیگرے معلوم کر سکتے ہیں۔ آخری سر  $ل_۸$  کے مساوی ہوگا۔ کسی آئندہ باب میں یہ معلوم ہوگا کہ عددی مساواتوں کو حل کر نیکاً بہترین عملی طریقہ صرف اس عمل کی توسیع ہے جو ذیل کی مثالوں میں استعمال کیا گیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$لا - لا۵ + لا۳ - لا۲ = ۱۱ + لا۱$$

کی اصلوں سے بقدر ۴ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

عمل جواب بہترین طریقہ پر ذیل سے ظاہر ہے

|      |      |     |     |   |
|------|------|-----|-----|---|
| ۱۱   | ۱۴ - | ۷   | ۵ - | ۱ |
| ۲۰ - | ۱۲   | ۴ - | ۲   |   |
| ۹ -  | ۵ -  | ۳   | ۱ - |   |
|      | ۶۰   | ۱۲  | ۲   |   |
|      | ۵۵   | ۱۵  | ۳   |   |
|      |      | ۲۸  | ۲   |   |
|      |      | ۴۳  | ۷   |   |
|      |      |     | ۲   |   |
|      |      |     | ۱۱  |   |

یہاں دیئے ہوئے کثیرالارقام کو اول لا - ۴ سے تقسیم کیا گیا جس سے باقی

۹ - (= ۱۱) اور خارج قسمت لا - لا۳ + لا۲ - ۵ حاصل ہوا (دیکھو دفعہ ۸)۔ اسکو پھر لا - ۴ سے تقسیم کیا گیا تو باقی ۵۵ (= ۱۱) اور خارج قسمت لا۳ + لا۱ + ۱۵ حاصل ہوا۔



تقسیم کرنے سے باقی ۳۴ (= ۸۴) اور خارج قسمت لا + ۷ اور اس کو تقسیم کرنے سے

$$= 9 - 600 + 6 \times 100 + 6 \times 11 + 6$$

۲۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$= 11 + 2\psi - 2\psi\gamma + \psi^2$$

کی اصلوں سے بقدر ۳۴ کے گھٹی ہوئی ہوں۔

|            |            |            |           |           |
|------------|------------|------------|-----------|-----------|
| 11         | .          | 1-         | 2         | .         |
| 333        | 112        | 39         | 9         | 3         |
| <u>353</u> | <u>112</u> | <u>38</u>  | <u>13</u> | <u>3</u>  |
|            | 393        | 93         | 18        | 3         |
|            | <u>5.6</u> | <u>131</u> | <u>31</u> | <u>4</u>  |
|            |            | 162        | 26        | 3         |
|            |            | <u>3.5</u> | <u>58</u> | <u>9</u>  |
|            |            |            | 34        | 3         |
|            |            |            | <u>92</u> | <u>12</u> |
|            |            |            |           | 15        |

اس لیے استحالة شدہ مساوات ہے

$$= 353 + 15.6 + 13.5 + 9.4 + 15 + 9$$

۳۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں مساوات

$$= 3 - 14 + 17 - 5 = 1$$

کی اصلوں سے بقدر ۲ کے زیادہ ہوں۔

اس عمل میں ضارب صریحاً ۲- ہے۔

جواب:  $-64 - 64 + 158 - 64 + 64 - 64 + 129 = 129$

۴ - مساوات

$$\cdot = r - u + v_{10} - v_c + v_r$$



کی اصلوں کو بقدر ۷ کے بڑھاؤ۔

جواب :-  $3 - 13 - 14 - 20 - 28 - 58 =$

۵ — مساوات

$5 - 13 - 14 - 20 - 28 - 58 =$

کو بقدر ۲۳ کے گھٹاؤ۔

یہاں بہتر یہ ہوگا کہ پہلے اصلوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹایا جائے۔ پھر استحالیہ شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹایا جائے۔ اس دوسرے عمل کو ذیل میں واضح کیا گیا ہے جہاں ہر عمل کا اختتام شکستہ خط سے دکھایا گیا ہے۔

(67)

|       |      |      |   |
|-------|------|------|---|
| ۴     | ۱۲ - | ۱۳ - | ۵ |
| ۳۴۵۶۰ | ۱۴۴۰ | ۱۰۰  |   |
| ۳۴۵۶۴ | ۱۴۲۸ | ۸۴   |   |
| ۱۹۱۲۲ | ۳۴۴۰ | ۱۰۰  |   |
| ۵۳۶۸۹ | ۵۴۶۸ | ۱۸۴  |   |
|       | ۹۰۶  | ۱۰۰  |   |
|       | ۶۳۴۴ | ۲۸۴  |   |
|       | ۹۵۱  | ۱۵   |   |
|       | ۴۳۲۵ | ۳۰۲  |   |
|       |      | ۱۵   |   |
|       |      | ۳۱۴  |   |
|       |      | ۱۵   |   |
|       |      | ۳۳۲  |   |

جواب :-  $5 - 13 - 14 - 20 - 28 - 58 =$

۳۴ — رقموں کا اخراج۔ دفعہ گذشتہ کے استعمال سے ایک

فائدہ یہ ہے کہ مساوات سے کسی مخصوص رقم کو خارج کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے



اس کے حل کرنے میں اکثر سہولت پیدا ہوتی ہے۔ ماکہ قوتوں میں استحالہ شدہ مساوات کو ترتیب دینے سے حاصل ہوگا

$$1. \text{ مآ} + (ن \text{ مھ} + 1. \text{ مآ}) + \frac{(ن-1) \text{ مآ}}{2 \times 1} + (ن-1) \text{ مآ} + 1. \text{ مآ} + \dots +$$

اگر مہ ایسا ہو کہ مساوات  $ن \text{ مھ} + 1. \text{ مآ} = 0$  کو پورا کرے تو استحالہ شدہ مساوات میں دوسری رقم غائب ہوگی۔ اگر مہ ایسا ہو کہ وہ مساوات

$$ن (ن-1) \text{ مآ} + 1. \text{ مآ} + (ن-1) \text{ مآ} + 1. \text{ مآ} = 0$$

کی دو اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو تو استحالہ شدہ مساوات میں تیسری رقم غائب ہوگی۔ چوتھی رقم کا اخراج مہ کے کعبی کے حل پر منحصر ہوگا۔ آخری رقم کو خارج کرنے کے لئے مساوات  $ف (مھ) = 0$  کو حل کرنا ہوگا جسکے معنی ابتدائی مساوات کو حل کر نیکی ہیں۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^3 - لا^2 + لا^2 - لا - ۷ = 0$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جسکی دوسری رقم موجود نہ ہو۔

$$ن \text{ مھ} + 1. \text{ مآ} = 0 \text{ سے } ۲ = ۷$$

اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ۔

$$\text{جواب: } -۱۵ - ۸ - ۱ = 0$$

۲۔ مساوات

$$لا^4 + لا^3 + لا^2 - لا - ۵ = 0$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جس میں دوسری رقم موجود نہ ہو۔

$$\text{جواب: } -۵۵ - ۶۵ - ۲۲ - ۱ = 0$$



### ۳ — مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ - لا^۱۸ - لا^۳ = ۲ + لا^۳$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جس میں تیسری رقم موجود نہ ہو۔

اس کے لئے مساوات درجہ دوم ہوگی

$$۶ لا^۲ - ۱۲ لا - ۱۸ = ۰ \quad \text{جس سے } لا = ۳ \quad ۳ = ۱ - ۱$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کو تحویل کر نیکی دو طریقے ہیں۔

اصلوں کو بقدر ۳ کے گھٹانے سے حاصل ہوگا

$$(۱) \quad لا^۳ + لا^۲ - لا^۱۱۱ - ۱۹۶ = ۰$$

اصلوں کو بقدر ایک کے بڑھانے سے حاصل ہوگا

$$(۲) \quad لا^۳ - لا^۲ + لا^۱۱۱ - ۸ = ۰$$

### ۳۵ — ثنائی سر۔ بہت سے جبری اعمال میں کثیر الارقام ف (لا)

کو شکل ذیل میں لکھنا سہولت بخش ہوتا ہے:-

$$لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{ن-۲} + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{۱} + لا^۲$$

$$+ ن لا^{ن-۱} - لا^{ن-۱} + لا^{ن-۱}$$

جس میں ہر رقم کا سر حرفی سر کے علاوہ ایک عددی سر پر مشتمل ہے جو (لا + ۱) کے

پھیلاؤ کی متناظر رقم کے سر کے مساوی ہے جب اسے مسئلہ ثنائی سے

پھیلا یا جائے۔ اس طریقہ پر لکھی ہوئی مساواتوں کی مثالیں دفعہ ۲ کے ۱۳ ویں اور ۱۶ ویں سوالات میں دی گئی ہیں۔ یہ شکل ایسی ہے جس میں ہر کثیر الارقام

کو فوراً تحویل کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم نرقیم ذیل اختیار کرتے ہیں:-

$$۶ = لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + \dots + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^{ن-۲} + \dots + ن لا^{ن-۱} - لا^{ن-۱} + لا^{ن-۱}$$



یہاں  $E$  لاحقہ  $n$  کے ساتھ  $n$  ویں درجہ کے کثیرالارقام کو تعبیر کرتا ہے جو ثنائی  
سروں کے ساتھ لکھا گیا ہو۔

(69)

اس لئے  $n$  کو  $n-1$ ،  $n-2$  وغیرہ میں بدلنے سے

$$E_{n-1} = 1 \cdot 1^{n-1} + (1-n) \cdot 1^{n-2} + \dots + (1-n) \cdot 1^{n-2} + 1^{n-1}$$

$$E_{n-2} = 1 \cdot 1^{n-2} + (2-n) \cdot 1^{n-3} + \dots + (2-n) \cdot 1^{n-3} + 1^{n-2}$$

.....

$$E_m = 1 \cdot 1^{m-1} + 3 \cdot 1^{m-2} + 3 \cdot 1^{m-2} + 1^{m-1}$$

$$E_m = 1 \cdot 1^{m-2} + 2 \cdot 1^{m-2} + 1^{m-1}$$

$$E_1 = 1 \cdot 1 + 1^{m-1}$$

$$E_0 = 1$$

ثنائی شکل میں رکھنے سے ایک فائدہ یہ ہے کہ مشتق تفاعل کو  
فوراً لکھا جاسکتا ہے۔ چنانچہ  $E_n$  کا پہلا مشتق تفاعل صریحاً ہے

$$E_n = \{ 1 \cdot 1^{n-1} + (1-n) \cdot 1^{n-2} + \dots + (2-n) \cdot 1^{n-2} + 1^{n-1} \}$$

یعنی  $E_{n-1}$ ۔ اس لئے اس طور پر تعبیر شدہ کثیرالارقام کا پہلا مشتق تفاعل  
 $E$  کے لاحقہ پراس قانون کو استعمال کر کے لکھا جاسکتا ہے جو دفعہ ۶  
میں متغیر کے قوت نما کے لحاظ سے بیان کیا گیا ہے۔ مثلاً  $E_m$  کا پہلا مشتق  
تفاعل اس کو  $m$  سے ضرب دیکر اس کے لاحقہ کو بقدر ایک کے گھٹانے سے  
بنایا جاسکتا ہے۔ اس لئے یہ مشتق تفاعل  $E_m$  ہے جسکی تصدیق طالب علم  
آسانی سے کر سکتا ہے۔

اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ کثیرالارقام  $E_n$  یعنی

$$1 \cdot 1^{n-1} + n \cdot 1^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \cdot 1^{n-2} + \dots + 1^{n-1}$$







۱۔ کثیر الارقام

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ اس نتیجہ کی تصدیق دفعہ ۳۳ میں تیار  
ہوئے حساب کے طریقہ سے کرے جسکو جبری اور نیز عددی مثالوں کی صورت میں  
استعمال کرنے سے اکثر فائدہ ہوتا ہے۔

۲ — مساوات

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

سے دوسری رقم خارج کرو۔  
اس کی اصلوں کو بقدر اس مقدار کے گھٹانا چاہئے جو مساوات  
۱ بھ + ۱ ا = ۰

سے حاصل ہو یعنی اصلوں کو بقدر  $\frac{1}{1}$  کے گھٹانا چاہئے۔

۴۴ کی اس قیمت کو لے اور اس میں درج کرنے سے مائیں حاصل ہونیوالی

مساوات ہوگی

$$= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 - 1^2}{2} + 6 \frac{(1^2 - 1^2) + 2^2}{2} + 6$$

۴۷ — وہ شرط معلوم کی کہ مساوات  $عن =$  کی دوسری اور تیسری رقمیں

ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں صہ کی ایک ہی قیمت کے لئے اور ۲۰ دونوں کو معدوم ہونا

چاہیے۔ ان سے وہ کو ساقط کر دینے سے ہمیں مطلوبہ شرط ملے گی۔



جواب :-  $1.1 - 1.1 = 0$

۴ — مساوات

$$= 19 - 112 + 117 + 11$$

سے دوسری رقم خارج کر کے اسکو حل کرو۔

ایک ہی اندراج سے تیسری قسم بھی خارج ہوگی اور حاصل ہوگا

$$= 26 - 3$$

مطلوبہ اصلیں اس مساوات کی اصلوں میں سے ۲ تفریق کرنے سے حاصل ہونگی۔

۵۔۔۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات  $عن =$  کی دوسری اور چوتھی سمتیں ایک ہی اندراج سے خارج ہو سکیں۔

یہاں صہ کی ایک ہی قیمت کے لئے لہ اور لہ دو تلوں کو معدوم ہو جانا چاہیئے۔ اسلئے مساواتوں

$$= 1 + m_1 1^3 + \frac{1}{2} m_1^2 1^3 + \frac{1}{6} m_1^3 1^3 = 1 + m_1 1^3$$

سے مع کو سا قط کر دیا جائے تو مطلب یہ شرط ہوگی

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

نوٹ :- مساوات درجہ چہارم کے سرول کے درمیان جب یہ شرط پوری ہو تو اسکو مساوات درجہ دوم میں تحویل کیا جاسکتا ہے کیونکہ جب دوسری رقتہم خارج کر دی جاتی ہے تو محصلہ مساوات میں درجہ دوم کی مساوات ہوگی اور ماکی قیمتوں سے لاکی قیمتیں حاصل ہونگی۔

۶ — مساوات

$$= 129 - 26r + 2r^2 + 17r + 2r^3$$

کی دوسری رقم خارج کر کے اسکو حل کرو۔

ما میں مساوات ہوگی

$$\cdot = 1 - \tilde{\gamma}_6 \text{ } \tilde{\gamma}_6 - \tilde{\gamma}_6$$

۷۔ اسی طرح مساوات

$$= 442 + 143 + 143 + 143 + 143$$



کو حل کرو۔

جواب :- اصلیں ہونگی ۔ ۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ ۵۔ ۶۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔

۸۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات  $x =$  کی دوسری اور پانچویں  
رقمیں ایک ہی استحالہ سے خارج ہو سکیں۔

جواب :-  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2 =$

۳۶۔ کعبی۔ دفعہ مابقی کے استحالہ کے سلسلہ میں ہم اس دفعہ اور آئندہ  
دفعات میں تیسرے اور چوتھے درجہ کی مساواتوں پر غور کریں گے کیونکہ ان کی بحث  
خاص اہمیت رکھتی ہے۔

مساوات

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots$  (۱)  
میں لا کی بجائے  $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots$  درج کیا جائے تو حاصل ہوگا

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots$

جہاں  $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2$  کی قیمتیں وہ ہیں جو دفعہ ۳۵ میں بیان ہو چکی ہیں۔  
اگر استحالہ شدہ مساوات میں دوسری رقم موجود نہ ہو تو

$1^2 = 0$  یا  $1^2 = -1$

(۲)  $1^2$  اور  $3^2$  میں  $1^2$  کی بجائے یہ قیمت درج کرنے سے دفعہ ۳۵ مثال  
کی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$1^2 = 1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 - 19^2 + 21^2 - 23^2 + 25^2 - 27^2 + 29^2 - 31^2 + 33^2 - 35^2 + 37^2 - 39^2 + 41^2 - 43^2 + 45^2 - 47^2 + 49^2 - 51^2 + 53^2 - 55^2 + 57^2 - 59^2 + 61^2 - 63^2 + 65^2 - 67^2 + 69^2 - 71^2 + 73^2 - 75^2 + 77^2 - 79^2 + 81^2 - 83^2 + 85^2 - 87^2 + 89^2 - 91^2 + 93^2 - 95^2 + 97^2 - 99^2 =$

پس استحالہ شدہ کعبی بغیر دوسری رقم کے حسب ذیل ہے

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots = (1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 - 19^2 + 21^2 - 23^2 + 25^2 - 27^2 + 29^2 - 31^2 + 33^2 - 35^2 + 37^2 - 39^2 + 41^2 - 43^2 + 45^2 - 47^2 + 49^2 - 51^2 + 53^2 - 55^2 + 57^2 - 59^2 + 61^2 - 63^2 + 65^2 - 67^2 + 69^2 - 71^2 + 73^2 - 75^2 + 77^2 - 79^2 + 81^2 - 83^2 + 85^2 - 87^2 + 89^2 - 91^2 + 93^2 - 95^2 + 97^2 - 99^2) + 1^2 =$



سروں کے یہ تفاعل جبری مساواتوں کے نظریہ میں استقدراہمیت رکھتے ہیں کہ انکو واحد حروف سے تعبیر کرنے میں بڑی سہولت ہوگی۔ اسلئے ہم ترقیم

$$۱۱ - ۱ = ۱۰ \quad ۱۲ - ۱ = ۱۱ \quad ۱۳ - ۱ = ۱۲ \quad ۱۴ - ۱ = ۱۳ \quad ۱۵ - ۱ = ۱۴ \quad ۱۶ - ۱ = ۱۵ \quad ۱۷ - ۱ = ۱۶ \quad ۱۸ - ۱ = ۱۷ \quad ۱۹ - ۱ = ۱۸ \quad ۲۰ - ۱ = ۱۹$$

کو اختیار کرتے ہیں اور استحالہ شدہ مساوات کو شکل

$$(۲) \dots\dots\dots = \frac{۱۳}{۱۲} + \frac{۱۴}{۱۳} + \frac{۱۵}{۱۴} + \frac{۱۶}{۱۵} + \frac{۱۷}{۱۶} + \frac{۱۸}{۱۷} + \frac{۱۹}{۱۸} + \frac{۲۰}{۱۹}$$

میں لکھتے ہیں۔

اگر اس مساوات کی اصلوں کو ۱ سے ضرب دیا جائے تو یہ مساوات ہو جائیگی

$$(۳) \dots\dots\dots = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰$$

یہ شکل ایسی ہے جو کعبی کی بحث میں زیادہ سہولت پیدا کر دیگی۔ اس مساوات کے پہلے رکن میں جو متغیری ہے وہ ۱۳ یا ۱۴ یا ۱۵ یا ۱۶ یا ۱۷ یا ۱۸ یا ۱۹ ہے۔ ابتدائی کعبی کو ۱ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

$$(۱۳ + ۱) + (۱۴ + ۱) + (۱۵ + ۱) + (۱۶ + ۱) + (۱۷ + ۱) + (۱۸ + ۱) + (۱۹ + ۱) + (۲۰ + ۱)$$

کے مماثل ہو جاتا ہے جسکی تصدیق طالب علم بہ آسانی کر سکتا ہے۔ اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، ب، جہ ہوں تو استحالہ شدہ مساوات (۲) کی اصلیں ہوں گی

$$عہ + \frac{۱}{۱۳} ، ب + \frac{۱}{۱۴} ، جہ + \frac{۱}{۱۵}$$

اب چونکہ

$$عہ + ب + جہ = \frac{۱۳}{۱۲}$$

اسلئے ان اصلوں کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-



$\frac{1}{3}$  (عہ - بہ - جہ)  $\frac{1}{3}$  (بہ - جہ - عہ)  $\frac{1}{3}$  (۲ جہ - عہ - بہ) ں

استحال شدہ مساوات کے ذریعہ ہم ابتدائی کعبی کی اصولوں کے متشاکل تفاعل (73)

۳ (عہ - بہ - جہ) (بہ - جہ - عہ) (۲ جہ - عہ - بہ) (عہ - بہ - جہ) (۲ جہ - عہ - بہ) کی قیمت دفعہ ۲ مثال ۱۵ میں

محصلہ قیمت کے مثال ہوگی۔  
اس سلسلہ میں عام مساوات کے متعلق ہم ایک اہم اصول بیان کرینگے۔ وہ یہ ہے کہ اصولوں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ کا کوئی متشاکل تفاعل جو صرف ان کے فرقوں کا تفاعل ہو ان سروں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے جو استحال شدہ مساوات میں جن میں دوسری رقم موجود نہ ہو واقع ہوتے ہیں۔ یہ بات ظاہر ہے کیونکہ استحال شدہ مساوات کی کوئی دو اصولوں عہ، بہ کا فرق ابتدائی مساوات کی اصولوں عہ، بہ کے فرق کے مساوی ہے اور اصولوں عہ، بہ، جہ، ضہ وغیرہ کا کوئی متشاکل تفاعل استحال شدہ مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً کعبی کی صورت میں اصولوں کے تمام متشاکل تفاعل جن میں صرف اصولوں کے فرق داخل ہوں گے، گ کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کئے جاسکتے ہیں۔ اس اصول کی مثالیں دفعہ ۲ کی مثالوں میں ملینگیں۔

۳۷۔ چار درجہ۔ اس صورت میں استحال شدہ مساوات دوسری

رقم کے بغیر حسب ذیل ہوگی۔  
 $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۱$

جہاں ۱ اور ۲ کی قیمتیں وہی ہیں جو دفعہ گذشتہ میں دی گئی ہیں اور جہاں ۱ مساوات







اس مساوات کی اصلوں کو ۱ سے ضرب دیا جائے جیسا کہ دفعہ ۳۶ کے کعبی کی صورت میں کیا گیا ہے تو

$$۱ + ۲ھ + ۳گ + ۴ی + ۵ا + ۶ع - ۳ھ = ۰ \quad (۲)$$

چار درجہ کا جبری حل دریافت کرنے میں اس کی یہ شکل آسانی پیدا کرتی ہے اس میں متغیر وہی ہے جو کعبی کی صورت میں تھا یعنی ۱ + ۲ا + ۳ا کیونکہ ابتدائی چار درجہ تفاعل کو ۱ سے ضرب دیا جائے تو وہ درحقیقت

$$(۱ + ۲ا + ۳ا) + ۴گ + ۵(۱ + ۲ا + ۳ا) + ۶ع - ۳ھ$$

کے حامل ہوتا ہے۔ ابتدائی چار درجہ مساوات کی اصلوں کے کسی متشکل تفاعل کو جو صرف ان کے فرقوں سے بنا ہو ۱، ۲ھ، ۳گ اور ۴ع کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

اگر ابتدائی مساوات کی اصلیں ع، ۲ا، ۳جہ، ۴ضہ ہوں تو یہ بہ آسانی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ استحالہ شدہ مساوات (۱) کی اصلیں ہیں

$$\frac{۱}{۳} (۳ع - ۲جہ - ۳ضہ) + \frac{۱}{۳} (۳جہ - ۲ضہ - ۳ع) + \frac{۱}{۳} (۳ضہ - ۲ع - ۳جہ)$$

انکا مجموعہ = ۰، انہیں سے دو دو کے حامل ضربوں کا مجموعہ =  $\frac{۲}{۳} ۱ + ۲ھ$ ، ان میں

(۷۵) تین تین کے حامل ضربوں کا مجموعہ =  $\frac{۲}{۳} ۱ + ۳گ$ ، اور ان سب کے مسلسل

حاصل ضرب کے لئے مساوات ہے

$$\frac{۱}{۳} (۳ع - ۲جہ - ۳ضہ) (۳جہ - ۲ضہ - ۳ع) (۳ضہ - ۲ع - ۳جہ) = ۲۵۶ (۱ + ۲ا + ۳ا - ۳ھ)$$

سروں کا ایک اور تفاعل ہے جو چار درجہ کی بحث میں بہت اہمیت رکھتا ہے اور جسے ہم اب بیان کریں گے۔ یہ وہ تفاعل ہے جس کا ذکر دفعہ ۲، مثال ۱ میں ہو چکا ہے یعنی



$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

اسکو ہم جے سے تعبیر کریں گے۔ جس مثال کا اوپر حوالہ دیا گیا ہے اس سے ظاہر ہے کہ یہ تفاعل اصولوں کے فرقوں کا تفاعل ہے۔ اس لئے اسے 'گ' اور 'ع' کی رقوم میں بیان ہو جانا چاہیئے اور فی الحقیقت ہمیں متماثل ملتی ہے

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

جسکی تصدیق طالب علم بہ آسانی کر سکتا ہے۔

یا اس ربط کو اس طریقہ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے:- جب سروں '۱'، '۱'، '۱'، '۲' وغیرہ کا کوئی تفاعل اصولوں کے فرقوں کے تفاعل کی صورت میں بیان ہو سکے تو سروں کا ایسا تفاعل اس استحالہ سے غیر متغیر رہیگا جو مساوات سے دوسری رقوم کو خارج کر دیتا ہے۔ پس اسکی قیمت غیر متغیر رہتی ہے جب ہم '۱' کو صف میں، '۱' کو '۱' میں، '۱' کو '۱' میں، وغیرہ بدلتے ہیں۔ پس

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

اس میں '۱'، '۱'، '۱' کی بجائے انکی قیمتیں 'گ'، 'ع' کی رقوم میں درج کرنے سے ہم بہ آسانی متذکرہ بالا متماثلہ حاصل کر لیتے ہیں جسکو عام طور پر شکل

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ - & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

میں لکھا جائیگا۔

۳۸۔ ہم رسم (Homographic) استحالہ۔ کسی کثیر الارقام کا

وہ استحالہ جس پر دفعہ ۳۳ میں غور کیا گیا ہے حسب ذیل استحالہ کی ایک خاص صورت ہے جس میں لائنیں متغیر ما کے ساتھ ربط

$$\frac{1 \text{ لا} + 1 \text{ مہ}}{1 \text{ لا} + 1 \text{ مہ}} = 1$$



رکھتا ہے۔  
اگر لہ = ائمہ = ہ لہ = مہ = اتوما = لا۔ ہ جیسا کہ دفعہ ۳۳ میں  
فرض کیا گیا تھا۔ لا کو ما کی رقوم میں حل کریں تو

$$\frac{\text{لا} = \text{مہ} - \text{مہ}}{\text{لہ} - \text{ما} - \text{لہ}}$$

(76) اس قیمت کو دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے درج کیا جاسکتا ہے  
اور اس طرح ما میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات حاصل کیجاسکتی ہے۔  
فرض کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلیں عہ، یہ، جہ، ضہ وغیرہ ہیں  
اور ان کے جواب میں استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں عہ، یہ، جہ، ضہ وغیرہ ہیں تو  
مساواتوں

$$\frac{\text{عہ} = \text{لہ} + \text{عہ}}{\text{لہ} + \text{عہ}} = \frac{\text{یہ} = \text{لہ} + \text{یہ}}{\text{لہ} + \text{یہ}}, \text{ وغیرہ}$$

سے ربط

$$\frac{(\text{لہ} - \text{مہ})(\text{لہ} - \text{عہ})}{(\text{لہ} + \text{عہ})(\text{لہ} + \text{یہ})} = \frac{(\text{عہ} - \text{یہ})}{(\text{عہ} - \text{جہ})}$$

یہ آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ علیٰ ہذا اصلوں کے کسی دوسرے زوج  
کیلئے۔ اگر ہم ابتدائی مساوات کی چار اصلیں اور ان کے جواب میں استحالہ شدہ  
مساوات کی چار اصلیں لیں تو ربط ملے گا

$$\frac{(\text{عہ} - \text{یہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})}{(\text{عہ} - \text{جہ})(\text{یہ} - \text{ضہ})} = \frac{(\text{عہ} - \text{یہ})(\text{جہ} - \text{ضہ})}{(\text{عہ} - \text{جہ})(\text{یہ} - \text{ضہ})}$$

پس اگر مجوزہ مساوات کی اصلیں ان فاصلوں کو تعبیر کریں جو ایک خط  
مستقیم پر کے چند نقطوں اور اسی خط پر کے ایک ثابت مبداء کے درمیان  
ہیں تو استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں نقطوں کے ایک متناظر نظام کے  
فاصلوں کو تعبیر کریں گی اور ان دونوں نظاموں میں یہ ربط ہوگا کہ ایک  
نظام کے کسی چار کی ”غیر موسیقی نسبت“ وہی ہوگی جو دوسرے نظام میں



انکے چار مزدوجوں کی ہے۔ اسی خاصیت کی بنا پر ہم اس استحالة کو ہم رسم استحالة کہیں گے۔

یہ بات یاد رہے کہ زیر بحث استحالة جس میں متغیروں لا اور ما میں

$$ا لا + ب لا + ج ما + د = ۰$$

کی شکل کا ربط ہے استحالة کی عام سے عام شکل ہے جس سے کسی متغیر کی ایک قیمت کے جواب میں دوسرے متغیر کی ایک اور صرف ایک قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۳۹۔ متشاكل تفاعلوں کے ذریعہ استحالة۔ فرض کرو کہ ایک

مساوات کو ایک دوسری مساوات میں تحویل کرنا مطلوب ہے جسکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے دئے ہوئے منطق تفاعل ہوں۔ فرض کرو کہ دیا ہوا تفاعل فہ (عہ، یہ، جہ، ..... ) ہے جہاں فہ میں تمام اصلیں داخل ہو سکتی ہیں یا اصلوں کی کوئی کسی تعداد۔ ہم اصلوں کے تمام ممکن اجتماع بہ طرز فہ (عہ یہ جہ) فہ (عہ یہ ضہ) وغیرہ بناتے ہیں اور استحالة شدہ مساوات کو شکل

(۷۷)

$$\{ا لا - فہ (عہ یہ جہ ..... )\} \{ا لا - فہ (عہ یہ ضہ ..... )\} = \dots$$
 میں لکھتے ہیں۔

جب اس حاصل ضرب کو پھیلا یا جاتا ہے تو ما کے متواتر سردی ہونی مساوات کی اصلوں عہ، یہ، جہ، وغیرہ کے متشاكل تفاعل ہونگے اور اسلئے اس مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان ہو سکیں گے۔

مثالیں

۱۔  $ا لا + ف لا + ق لا + ر = ۰$  کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں عہ، یہ، جہ، یہ ہیں۔ فرض کرو کہ استحالة شدہ مساوات ہے



$$م^۳ + ف + م^۲ + ق = ر$$

تب -  $ف = ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲$ ،  $ق = ع^۲ + یہ^۲$ ،  $ر = ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲$

اب دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے متشاکل تفاعلوں  
 $ع^۲$ ،  $ع^۲ + یہ^۲$ ،  $ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲$  کو معلوم کرنا ہے۔ ہم یہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$ع^۲ = ف - ع^۲ + یہ^۲ = ق - ع^۲ + یہ^۲ = ر - ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲$$

اسلئے استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$م^۳ - (ف - ع^۲ + یہ^۲) + م^۲ + (ق - ع^۲ + یہ^۲) - ر = ۰$$

۲۔ اسی صورت میں وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں  $ع^۳$ ،  $یہ^۳$ ،  $جہ^۳$  ہوں

جواب:-  $م^۳ + (ف - ع^۳ + ق + ر) + م^۲ + (ق - ع^۳ + ف + ر) - ر = ۰$

$$+ ر^۳ = ۰$$

۳۔ اگر مساوات

$$لا^۳ + ف + لا^۲ + ق + لا + ر + لا + س = ۰$$

کی اصلیں  $ع$ ،  $یہ$ ،  $جہ$ ،  $ضہ$  ہوں تو ایسی مساوات بناؤ جسکی اصلیں  $ع^۲$ ،  $یہ^۲$ ،  $جہ^۲$ ،  $ضہ^۲$  ہوں۔

فرض کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے

$$م^۳ + ف + م^۲ + ق + م + ر + م + س = ۰$$

تب -  $ف = ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲$ ،  $ق = ع^۲ + یہ^۲$ ،  $ر = ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲$

$$س = ع^۲ + یہ^۲ + جہ^۲ + ضہ^۲$$

دفعہ ۲ کی مثالوں ۸، ۷ سے مقابلہ کرو۔

جواب:-  $م^۳ - (ف - ع^۲ + ق) + م^۲ + (ق - ع^۲ + ف + ر) - (ر - ع^۲ + ق + س) +$

$$+ س^۲ = ۰$$



$$۴ - اگر \quad ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} = ۰$$

کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں لہ، نہ، یعنی  
بہ جہ + عہ ضہ + جہ عہ + بہ ضہ + عہ بہ + جہ ضہ  
ہوں۔ دیکھو دفعہ ۲، مثال ۱۔

$$جواب :- ۱ - ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} (۱ - ۱ \frac{۱}{۲}) = ۱$$

$$- ۱ \frac{۱}{۲} (۱ - ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲}) = ۰$$

۵۔ اگر مثال ۴ کے محصلہ کعبی کی اصلوں کو  $\frac{۱}{۲}$  سے ضرب دیا جائے  
اور پھر دوسری رقم کو خارج کیا جائے تو ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات ہے  
ی۔ ع۔ ی + ۲ جے = ۰

(78)

۴۔ وہ مساوات بنانا جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی  
اصلوں کی کوئی قوتیں ہوں۔

گزشتہ دفعہ میں بیان کئے ہوئے متشاکل تفاعلوں کے طریقہ سے یہ استحالہ  
اکثر محنت طلب ہوتا ہے۔ اس سے زیادہ آسان طریقہ جسمیں صرف عمل ضرب کو  
دخل ہے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس کا انحصار ثنائی مساوات  
لا۔ ۱ = ۰ کے حل کے علم پر ہے جسپر باب ائمذہ میں بحث کی جائے گی۔  
عام طریق عمل اشلہ ذیل کی مثالوں سے کافی طور پر واضح ہو جائیگا جہاں  
اس طریقہ کو دوسرے اور تیسرے درجہ کی مساواتوں پر استعمال کیا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں مساوات

$$۱ + ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} + \dots + ۱ \frac{۱}{۲} + ۱ \frac{۱}{۲} = ۰$$



کی اصلوں کے مربع ہوں۔  
اس استحالہ کو عمل میں لانے کے لئے متماثلہ

$$\text{لا} + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} + \dots + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} = (\text{لا} - \text{عہ}) (\text{لا} - \text{عہ}) \dots (\text{لا} - \text{عہ})$$

میں لا کی بجائے۔ لا درج کرو تو ہمیں حاصل ہوگا (دفعہ ۳۰ کی طرح)

$$\text{لا} - \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} - \dots - \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} = (\text{لا} + \text{عہ}) (\text{لا} + \text{عہ}) \dots (\text{لا} + \text{عہ})$$

ضرب دینے سے

$$(\text{لا} + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} - \dots - \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}}) (\text{لا} - \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}} - \dots + \text{ب} \text{ لا}^{\text{ن}})$$

$$= (\text{لا} - \text{عہ}) (\text{لا} - \text{عہ}) \dots (\text{لا} - \text{عہ})$$

یہ ظاہر ہے کہ اس متماثلہ کے پہلے رکن کو پھیلا یا جائے تو پھیلاؤ میں لا کی صرف جفت قوتیں داخل ہونگی اس لئے ہم لا کی بجائے مارکھ سکتے ہیں جس سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ما} + (\text{ب} - \text{ب}^{\text{ن}}) \text{ ما}^{\text{ن}} + (\text{ب}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} - \text{ب}^{\text{ن}}) \text{ ما}^{\text{ن}} + \dots + \text{ما}^{\text{ن}}$$

$$= (\text{ما} - \text{عہ}) (\text{ما} - \text{عہ}) \dots (\text{ما} - \text{عہ})$$

اسکے پہلے رکن کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات ملے گی۔

نوٹ :- اس استحالہ کا فائدہ یہ ہے کہ ہم اکثر صورتوں میں دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد کی انتہا متعین کر سکیں گے۔ کیونکہ ایک حقیقی اصل کا مربع ہمیشہ مثبت ہونا چاہئے اور اسلئے استحالہ شدہ مساوات کی جتنی اصلیں مثبت ہونگی ان سے زیادہ دی ہوئی مساوات کی اصلیں حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

۴۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$\text{لا} - \text{لا}^{\text{ن}} + \text{لا}^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}} = ۶$$



(79)

(بن + بن<sup>۳</sup> لا<sup>۳</sup> + ...) + لا (بن<sup>۱</sup> + بن<sup>۲</sup> لا<sup>۳</sup> + ...) + لا (بن<sup>۴</sup> + بن<sup>۵</sup> لا<sup>۶</sup> + ...)



میں لکھو کہ ہم اختصاراً

ف + لاق + لا<sup>۱</sup> = (لا - عم) (لا - عم) ..... (لا - عم) (عج) (۱)  
سے تعبیر کریں گے جہاں ف، ق، سب کے سب لا کے تفاعل ہیں۔

اب (۱) ف + لاق + لا<sup>۱</sup> = (لا - عم) (لا - عم) ..... (لا - عم) (عج) (۱)  
اس تماثلہ میں لا کی بجائے یکے بعد دیگرے سہ لا اور سہ لا رکھا جائے تو

(۲) ف + سہ لاق + سہ لا<sup>۱</sup> = (سہ لا - عم) (سہ لا - عم) ..... (سہ لا - عم) (عج) (۲)

(۳) ف + سہ لاق + سہ لا<sup>۱</sup> = (سہ لا - عم) (سہ لا - عم) ..... (سہ لا - عم) (عج) (۳)  
کیونکہ ف، ق، سب غیر متغیر رہتے ہیں اس وجہ سے کہ وہ لا کے تفاعل ہیں۔  
اب (۱)، (۲)، (۳) کو باہم ضرب دو اور دفعہ ۲۶ کے نتیجوں کو استعمال کرو تو

ف + لاق + لا<sup>۱</sup> = (لا - عم) (لا - عم) ..... (لا - عم) (عج) (۳)

اس تماثلہ کے پہلے رکن میں لا کی قوتیں صرف ۳ کا ضعیف ہیں اس لئے ہم لا<sup>۱</sup>  
کی بجائے ما درج کر سکتے ہیں جس سے مطلوبہ استحالہ شدہ مساوات حاصل ہو جائیگی۔  
۶۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کی اصلیں مساوات

$$لا - لا^۱ + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ = ۰$$

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

جواب :- لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> = ۰

۷۔ مثال ۵ کے طریقہ سے دفعہ ۹ کی مثال ۲ کی تصدیق کرو۔

۸۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں مساوات

$$لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ = ۰$$

کی اصلوں کے مکعب ہوں۔

جواب :- لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> = ۰  
۳ + (لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> + لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup>) + ۱ + لا<sup>۸</sup> = ۰



( 80 )

## ۴۱۔ استحصال کی عام صورت۔ استحصال کے عام مسئلہ میں ہمیں

ما میں ایک نئی مساوات بنانی ہوگی جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات ف (لا)۔ کی اصلوں کے ساتھ ایک دیا ہوا ربط ف (لا، ما) =۔ رکھیں۔ اسی صورت میں استحصال شدہ مساوات اس طرح حاصل ہوگی کہ دی ہوئی مساوات میں لا کی وہ قیمت ما کی رقوم میں درج کی جائے جو ربط ف (لا، ما) =۔ سے حاصل ہو۔ یا یہ الفاظ دیگر دونوں مساواتوں ف (لا) =۔ اور ف (لا، ما) =۔ سے لا ساقط کر دیا جائے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایسی مساوات بنانا مطلوب ہے جسکی اصلیں مساوات

$$\text{لا۔ ف لا + ق لا۔ ر۔}$$

کی اصلوں (عہ، یہ، جہ) میں سے دو اصلوں کے مجموعے ہوں۔ یہاں

$$\text{ما = بہ + جہ = عہ + بہ + جہ = عہ = ف۔ عہ}$$

مساوات ف (لا، ما) =۔ اس صورت میں ما = ف۔ لا ہے کیونکہ جب لا قیمت عہ اختیار کرتا ہے تو ما مجوزہ قیمتوں میں سے ایک قیمت اختیار کرتا ہے اور جب لا دوسری قیمتیں بہ اور جہ اختیار کرتا ہے تو ما دوسری مجوزہ قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ اس لئے دی ہوئی مساوات میں لا کی بجائے ف۔ ما درج کرنے سے مطلوبہ استحصال شدہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ اگر کعبی

$$\text{لا۔ ف لا + ق لا۔ ر۔}$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

$$\text{بہ + جہ = عہ، جہ + عہ = لا، عہ + بہ = جہ}$$



یہاں

$$1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1+x}{x^2}$$

یعنی دیا ہوا ربط لا ما = ا + ر ہے۔ اس لئے ف (لا) =۔ میں لا کی بجائے

۱+۱ درج کرنے سے استحالہ شدہ مساوات حاصل ہوتی ہے۔

جواب :-  $r^3 - r^2 - r + 1 = (r-1)(r^2 + r + 1)$

۲۔ اُسی کہی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں  
عہ بہ + عہ جہ + عہ بہ + بہ جہ + یہ جہ + عہ جہ

لا کی بجائے  $\frac{1}{\sin \theta}$  درج کرو۔

جواب :-  $\text{م}^2 - \text{م} + (\text{ف} + \text{ق}) + \text{ا} + \text{ر} - \text{ف} - \text{ق} = 0$

(81)

۴۔ اُسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع} + \text{ج} - \text{ب}} \quad \frac{\text{ب}}{\text{ج} + \text{ع} - \text{ب}} \quad \frac{\text{ج}}{\text{ع} + \text{ب} - \text{ج}}$$

ہوں۔

لا کی بجائے  $\frac{f}{b^2 + 1}$  درج کرو۔

جواب :- (ف - ۳ فق + ۸۰) ما

$$+ (ف^2 - ۳فق + ۱۲ر) + ۱۰(۲ - ۲فق) + ۱۰ = ۰$$

۴۔ اگر کمی

ولا<sup>٣</sup> + س + لا<sup>٢</sup> + ج + لا + د = .

کی صلیب سے، یہ، جب ہوں تو ثابت کرو کہ ہم رسم استحالہ

$$= 2 + (6 + 1) \times 1 + 6 \times 1$$







(82)

بیان ہو سکتے۔ لیکن موجودہ مثال میں دفعہ ۴۱ کے طریقہ سے مطلوبہ مساوات زیادہ آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات کو ہم اختصاراً مجوزہ مساوات کی ”مرجع دار فرقوں کی مساوات“ کہیں گے۔ ماکو استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں میں سے کسی ایک کے مساوی رکھنے سے مثلاً

$$ما = (ب - ج) رکھنے سے حاصل ہوتا ہے$$

لیکن  $ع + ب + ج = ۲ ق - ع + ب + ج = ۱$  اس لئے دفعہ ۴۱ کی مساوات  $ف (لا، ما) = ۰$  ہو جاتی ہے

$$ما = ۲ ق - لا + \frac{۲}{لا}$$

یا  $لا + (ما + ۲ ق) لا - ۲ = ۰$  دی ہوئی مساوات کو اس میں سے تفریق کیا جائے تو

$$(ما + ق) لا - ۳ = ۰ \text{ یعنی } لا = \frac{۳}{ما + ق}$$

پس ما میں استحالہ شدہ مساوات ہوگی

$$ما + ۶ ق + ما + ۹ ق + ما + ۲ ق + ۲ = ۰ \dots (۲)$$

اگر وہ مساوات بنانا مطلوب ہو چکی اسیں کہیں

$$لا - ۳ لا + ۳ لا + لا + لا = ۰ \dots (۳)$$

کی اصلوں (ع، ب، ج) میں سے دو دو کے فرقوں کے مرجع ہوں تو ہم اول دوسری رقم کو خارج کرتے ہیں جس سے مساوات حاصل ہوگی

$$ما + \frac{۳}{لا} + \frac{۳}{لا} = ۰$$



اور مطلوبہ مساوات وہی ہوگی جو اس مساوات کی مربع دار فرقوں کی مساوات ہے کیونکہ دوسری رقم کو خارج کرنے سے کسی دو اصلوں کا فرق غیر متبدل رہتا ہے۔ اس لئے موخر الذکر مساوات میں

$$ق = \frac{۵۳}{۲}، ر = \frac{گ}{۳}$$

رکھنے سے ہم مطلوبہ مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ مطلوبہ مساوات ہے

(83)

$$لا + \frac{۱۸}{۲} لا + \frac{۸۱}{۲} لا + \frac{۲۷}{۲} (گ + ۲ھ) = ۰ \dots (۴)$$

جسکی اصلیں ہیں

(بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - دہ) (دہ - بہ)  
مساوات (۴) سے کسروں کو دور کر نیچے لئے اس کی اصلوں کو  $\frac{۱}{۲}$  سے ضرب دینا ہوگا جس سے یہ مساوات ہو جائیگی

$$لا + ۱۸ لا + ۸۱ لا + ۲۷ (گ + ۲ھ) = ۰ \dots (۵)$$

جسکی اصلیں ہونگی

$$\frac{۱}{۲} (بہ - جہ) \frac{۱}{۲} (جہ - عہ) \frac{۱}{۲} (عہ - دہ) \frac{۱}{۲} (دہ - بہ)$$

اسکی مدد سے کبھی (۳) کی اصلوں کا ایک اہم تفاضل یعنی  
فرقوں کے مربعوں کا حاصل ضرب سروں کی رقوم میں معلوم  
کیا جاسکتا ہے:-

$$\frac{۱}{۲} (بہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - دہ) (دہ - بہ) = ۲۷ (گ + ۲ھ) \dots (۶)$$

دفعہ ۳ کی مثالہ سے یہ ظاہر ہے کہ  $۲۷ (گ + ۲ھ)$  کا ایک جزو ضربی







مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہو تو کبھی (۳) کی دو اصلیں خیالی ہونگی تاکہ ان کے فرق کا مربع منفی ہو۔ اور جب مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہ ہو تو کبھی (۳) کی سب اصلیں حقیقی ہونگی کیونکہ (۳) کی خیالی اصلوں کے ایک زوج سے (۵) کی ایک منفی اصل کا موجود ہونا لازم آتا ہے۔

حسب ذیل صورتوں میں ہم یہ مان لیتے ہیں کہ مساوات کے سر حقیقی مقادیر ہیں۔ تب چار صورتیں پیدا ہوتی ہیں :-

(۱) اگر  $g^2 + 4h^2$  منفی ہو تو کبھی کی سب اصلیں حقیقی

ہونگی۔ کیونکہ اسکو منفی بنانے کے لئے  $h$  کو منفی ہونا چاہئے (اور  $g^2 + 4h^2$  تب مساوات (۵) کی علامتیں یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہونگی اور اسلئے دفعہ ۲ سے) مساوات (۵) کی کوئی اصل منفی نہیں ہوگی اور اسلئے دئے ہوئے کبھی کی تمام اصلیں حقیقی ہونگی۔

(۲) اگر  $g^2 + 4h^2$  مثبت ہو تو کبھی کی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

کیونکہ اس صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل منفی ہونی چاہئے۔

(۳) اگر  $g^2 + 4h^2 = 0$ ۔ تو کبھی کی دو اصلیں مساوی ہونگی

کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی ایک اصل صفر کے مساوی ہوتی ہے۔ اس صورت میں  $h = 0$ ۔ اور یہ مان لیا گیا ہے کہ  $h$  معدوم نہیں ہوتا۔ اسلئے

ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ممیز (دفعہ ۲۲) کا صفر ہوتا وہ شرط ظاہر کرتا ہے

جو مساوی اصلوں کے لئے ہے۔

(۴) اگر  $g^2 + 4h^2 = 0$ ۔ اور  $h = 0$ ۔ تو کبھی کی تینوں اصلیں

مساوی ہونگی۔ کیونکہ ایسی صورت میں مساوات (۵) کی سب اصلیں



سفر کے مساوی ہوتی ہیں۔ یہ مساواتیں شکل

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

میں بھی یہ آسانی بیان کیجا سکتی ہیں اور اسلئے سروں کے درمیان یہ روابط

وہ شرطیں ہیں کہ کبھی ایک کامل مکعب ہو۔

۴۴۔ عام صورت میں فرقوں کی مساوات۔ اب ہم متشاکل  
تفاعلوں کی مدد سے وہ مساوات بتانیکے عام مسئلہ پر غور کریں گے جس کی اصلیں دی ہوئی  
مساوات کی اصلوں کے فرق یا فرقوں کے مربع ہوں۔ فرض کرو کہ مجوزہ  
مساوات

$$f(1) \equiv (1-a)(1-b) \dots (1-n) = 0$$

(85)

ہے۔ آئیں لا کی بجائے لا + عمر درج کرنے اور رکھنے بعد دیگرے  
۱، ۲، ۳، ...، n قیستیں دینے سے ہمیں مساواتیں ملینگی

$$\left\{ \begin{aligned} f(1) &\equiv (1-a)(1-b) \dots (1-n) = 0 \\ f(2) &\equiv (2-a)(2-b) \dots (2-n) = 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$f(n) \equiv (n-a)(n-b) \dots (n-n) = 0$$

نیز دفعہ ۶ کا پھیلاو استعمال کرنے سے اور f(عمر) = ۰ رکھنے سے

ہمیں مساوات ملے گی

$$\frac{1}{1} f(1) + \frac{1}{2} f(2) + \dots + \frac{1}{n} f(n) = 0$$



اس مساوات کی دوسری جانب کے جملہ کو فہ (لا، عم) سے تعبیر کیا جائے اور متشاملات (۱) کو یا ہم ضرب دیا جائے تو

فہ (لا، عم)، فہ (لا، عم)، ..... فہ (لا، عم) (

$\equiv \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \} \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \} \dots \dots \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \} \{ \text{لا} - (\text{عم} - \text{عم}) \}$

اس لئے فرقوں کی مساوات بنانے کے لئے ہم ن اجزائے ضربی فہ (لا، عم)، فہ (لا، عم) وغیرہ کو یا ہم ضرب دے سکتے ہیں اور حاصل ضرب میں اصولوں کے جو متشاكل تفاعل واقع ہوتے ہیں انکی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ یا ہم دفعہ ۴۲ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب متشاكل بالا کی بایں جانب کے  $\frac{1}{n}$  (ن - ۱) اجزائے ضربی کا حاصل ضرب بالراست معلوم کر سکتے ہیں اور پھر متشاكل تفاعلوں کی بجائے ان کی قیمتیں سروں کی رقوم میں درج کر سکتے ہیں۔ لا میں ن (ن - ۱) دیں درجہ کی حاصل ہونے والی مساوات کی اصولوں میں سے دو اصلیں مساوی مگر مختلف علامت ہونگی۔ اب چونکہ اس مساوات میں لا کی صرف جفت قوتیں واقع ہوتی ہیں اس لئے لا کی بجائے ما درج کیا جاسکتا ہے اور اس طرح  $\frac{1}{n}$  (ن - ۱) دیں درجہ کی وہ مساوات حاصل ہوسکتی ہے جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

تیسرے درجہ سے اعلیٰ تر مساواتوں کے لئے فرقوں کی مساوات کا بنانا دشوار ہو جاتا ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں درجہ چہارم کی عام جبری مساوات کی صورت میں فرقوں کی مساوات معلوم کریں گے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$\text{لا}^۳ - ۶ \text{لا}^۲ + ۱۱ \text{لا} - ۶ = ۰$$

کی اصلیں عم، یہ، جہ ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں



$$ب^۲ + ج^۲، ج^۲ + ع^۲، ع^۲ + ب^۲$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } م^۲ - ۲۸ + ۲۵۴۵ - ۶۲۵۰ = ۰$$

۲۔ کعبی

$$لا^۳ + ۲ لا^۲ + ۳ لا + ۱ = ۰$$

کی اصلیں ع، ب، ج ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{۱}{ب^۳} + \frac{۱}{ج^۳} - \frac{۱}{ع^۳}، \frac{۱}{ج^۳} + \frac{۱}{ع^۳} - \frac{۱}{ب^۳}، \frac{۱}{ع^۳} + \frac{۱}{ب^۳} - \frac{۱}{ج^۳}$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } م^۲ + ۱۲ م - ۱۴۲ - ۶۱۴۲ = ۰$$

۳۔ کعبی

$$لا^۳ + ق لا + ر = ۰$$

کی اصلیں ع، ب، ج ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$ب^۲ + ب + ج + ج^۲، ج^۲ + ع + ج + ع^۲، ع^۲ + ع + ب + ب^۲$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } (م + ق) = ۰$$

۴۔ کعبی

$$لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰$$

کی اصلیں ع، ب، ج ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$ب^۲ + ج - ع، ج^۲ + ع - ب، ع^۲ + ب - ج$$

ہوں۔

$$\text{جواب :- } م^۲ - (ف + ق) م - (ف + ق + ر) = ۰$$

$$+ ف - ۶ ف + ق + ۸ ف + ۱۶ ف + ق + ر + ۸ ر = ۰$$

۵۔ اگر کعبی



$$= 5^2 + 5^3 + 1^3 + 1 + 1 (5 + 1 + 1) 3 - 5$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ (یہ - جہ) (جہ - عہ) (عہ - بہ) کا  
ایک منطق تفاعل ہے۔

جواب :-  $\pm 9(1+1+1)$

۶۔ کمی

$$= \mu_1 + \nu_1 \mu_2 + \nu_2 \mu_3 + \nu_3 \mu_4$$

کے گ اور ہ کے درمیان ربط معلوم کرو اگر اس کی اصلیں عہ، یہ، جہ ایسی ہوں  
کہ (بہ - جہ) <sup>۱</sup>، (جہ - عہ) <sup>۲</sup>، (عہ - یہ) <sup>۳</sup> سلسلہ حسابیہ میں ہیں۔

جواب: گ + ۲ھ = ۲۰

۱۔ اگر

$$= 1 - \psi^2 + \psi^2 \zeta^2 - \psi^2 \zeta$$

کی اصلیں عہ، بہ، چہ، ضہ ہوں تو

$$(ب^۲ - ج^۲)(ع^۲ - ض^۲) + (ج^۲ - ع^۲)(ا^۲ - ب^۲ - ض^۲) + (ع^۲ - ا^۲)(ب^۲ - ج^۲ - ض^۲)$$

کی قیمت معلوم کرو۔

جواب :- صفر

1-8

به چه + چه عم + ع به + عم ضم + به ضم + چه ضم = ۰

توثابت کرو کہ

$$\{ (ريه - جه) (ع - ضه) + (جه - عه) (ب - ضه) + (جه - ضه) (ع - ب) \}$$

$$n = \{ (b^1 - j^1)(e^1 - f^1) + (b^2 - j^2)(e^2 - f^2) \}$$

۹۔ مساوات

$$= 15 - 19 - 1 + 1 - 1$$

کوہل کرو جس کی ایک اصل شکل ۱ + عہدہ ۱ کی ہے۔

اصلوں کو بقدر ا کے گھٹاؤ۔ لا کی بجائے عہد۔ آ مرج کرو۔ عہ کو



چوں -

میں

یعنی  $۲ = ۲ + ۲$  جہ سے دی ہوئی مساوات کی کوئی دو اصلیں تعبیر ہوتی ہیں۔ جہاں یہ اور جہ سے حاصل ہوئی ہے اس کی اصلوں کو ۲ سے ضرب دیکر مطلوبہ



کبھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

۱۱۔ چار درجی

$$۱. لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

کی اصلیں ع، بہ، جہ، ضہ ہیں۔ چہ درجی مساوات بناؤ جسکی اصلیں

$$بہ + جہ + عہ + عہ + یہ + عہ + ضہ + ضہ + جہ + ضہ$$

ہوں۔

مثال ۱۰۔ اکا طریقہ استعمال کرنے سے مطلوبہ مساوات دفعہ ۲۴ مثال ۲۰ کی شرط سے حاصل کی جاسکتی ہے۔  
اس صورت میں شرط ہوگی

$$۱. لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

یہ مساوات ھ میں چہ درجی ہے جس کی اصلیں ۱۔ (بہ + جہ) وغیرہ

ہیں جس سے مطلوبہ مساوات گزشتہ مثال کی طرح حاصل کی جاسکتی ہے۔

۱۲۔ مثال ۱۰ کے کبھی کی صورت میں وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

(88)

$$\frac{بہ - جہ - عہ}{بہ + جہ - عہ} = \frac{جہ - عہ - بہ}{جہ + عہ - بہ} = \frac{عہ - بہ - جہ}{عہ + بہ - جہ}$$

ہوں۔

اصلوں کو بقدر ھ کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ حاصل ہونے والے  
کبھی کی اصلیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں (دفعہ ۲۴ مثال ۱۸)۔ یہ شرط ہوگی

$$۱. لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

یہ مساوات ھ میں تیسرے درجہ کی مساوات میں تحویل ہوگی جس کی اصلیں  
مندرجہ بالا قیمتیں ہونگی کیونکہ

$$(عہ - ھ) = (بہ - ھ) (جہ - ھ) یعنی ھ = \frac{بہ - جہ - عہ}{بہ + جہ - عہ}$$



۱۳۔ اسی کعبی کی صورت میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$\frac{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}} = \frac{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}$$

ہوں۔  
اصلوں کو بقدر  $\frac{1}{2}$  کے گھٹاؤ اور وہ شرط معلوم کرو کہ احتمال شدہ کعبی کی اصلیں  
سلسلہ موسیقیہ میں ہوں (دیکھو دفعہ ۲۴ مثال ۱۹)۔

$$\frac{1}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}} + \frac{1}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}} = \frac{2}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}$$

$$\frac{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}} = 1 \text{ یعنی}$$

$$\frac{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}} = 1 \text{ میں مساوات ہے}$$

جہاں ایک کعبی میں تحویل ہو جائیگی۔

۱۴۔ چار درجی

$$\frac{1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا}}{1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا}} = 1$$

کی اصلیں  $\frac{1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا}}{1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا} + 1 \text{ لا}}$  وہ کعبی معلوم کرو جس کی اصلیں

$$\frac{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}} = \frac{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}{2 \text{ بے جب} - \text{عہ} - \text{بہ}}$$

ہوں۔  
اصلوں کو بقدر  $\frac{1}{2}$  کے گھٹاؤ اور دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کی شرط استعمال کرو۔  
اس صورت میں یہ شرط ہے

$$\frac{1 \text{ لا} - 1 \text{ لا}}{1 \text{ لا} - 1 \text{ لا}} = 1$$



جس کو ایک کعبی میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کی اصلیں مندرجہ بالا قیمتیں ہوں۔  
۱۵ — وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں کعبی

$$لا + ق + لا + ر =$$

کی اصلوں کی نسبتیں ہوں۔

عام مسئلہ کو عمل استقاط کی مدد سے حل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ف (لا) =  
دی ہوئی مساوات ہے اور ر = ع = دو اصلوں کی نسبت۔ اب چونکہ ف (یہ) =

اسلئے ف (کا ع) = اور نیز ف (ع) =۔ اسلئے ر میں مطلوبہ مساوات

ان دو موخر الذکر مساواتوں سے ع کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی۔ موجودہ

(89)

مثال کے کعبی کی صورت میں

$$ر (ر + کا + لا) + ق (کا + لا) =$$

۱۶ — اگر

$$لا + ف + لا + ق + لا + ر =$$

کی اصلیں ع، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں

$$یہ + جہ، جہ + ع، ع + یہ$$

ہوں۔

جواب: لا — ۲ (ف — ۲ ق) لا + (ف — ۴ ف) ق

$$+ ۵ ق — ۲ ف (ر) لا — (ف ق — ۲ ف ر + ۴ ف ق ر — ۲ ق — ر)$$

۱۷ — اسی کعبی کے لئے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$\frac{یہ}{جہ} + \frac{جہ}{ع} + \frac{ع}{جہ} + \frac{ع}{یہ} + \frac{یہ}{ع}$$

جواب: لا — ۲ (ف ق ر — ۳ ر) + ۵ ف ق ر

$$+ ۳ ر + ق (۳) لا — (ف ق — ۲ ف ر + ۴ ف ق ر — ۲ ق — ر) =$$

۱۸ — اگر کعبی

$$لا + ق + لا + ر =$$

کی اصلیں ع، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں



ہوں۔

۱۹ — اگر کعبی

ہوں۔

ہوں۔

ہموں -

ہموں۔

$$- \text{م} = \text{ف}^3 \text{ر} - \text{ا} \text{ق} \text{ق} \text{ر} + \text{ق}^2 \text{ر} + \text{م}^2 \text{ر}$$



(90)

# پانچواں باب

## متکافی اور ثنائی مساواتوں کا حل

۴۵۔ متکافی مساواتیں۔ دفعہ ۳۲ میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ

تمام متکافی مساواتوں کو ایک معیاری شکل میں بخوبی لیا جاسکتا ہے جس کا درجہ جفت ہو اور ابتدا اور آخر سے شمار کی ہوئی رتھیں مساوی اور ہم علامت ہوں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ معیاری شکل کی متکافی مساوات کو دوسری ایسی مساوات میں بدلا جاسکتا ہے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ کا نصف ہو۔

مساوات

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots + 1^2 + 1^2 = 0$$

پر غور کرو۔ اس کو لا سے تقسیم کر کے ابتدا اور آخر سے متساوی انفصل رقموں کو ملانے سے

$$1 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + 1 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + \dots + 1 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + 1 \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = 0$$

فرض کرو کہ  $\frac{1}{1} = 1$  اور یہ کہ  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1}$  اختصاراً  $2$  سے تعبیر ہوتا ہے تو صریحاً ربط حاصل ہوتا ہے



$$و = و ی - و$$

$$پ = پ ی - پ$$
 پ کو متواتر ۱، ۲، ۳، وغیرہ قیمتیں دینے سے  

$$و = و ی - و$$

$$و = و ی - و$$

$$و = و ی - و$$

$$و = و ی - و$$
 وغیرہ۔ ان قیمتوں کو مساوات بالائیں درج کرنے سے ی میں م ویں درجہ کی مساوات ملتی ہے اور ی کی قیمتوں سے لا کی قیمتیں درجہ دوم کی ایک مساوات حل کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

## مثالیں

(91)

۱۔ مساوات  

$$لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۱$$
 کی اصلیں معلوم کرو۔  
 لا + ۱ سے تقسیم کرو (دیکھو دفعہ ۳۲) تو  

$$لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۱$$
 اس مساوات کو شکل

$$لا - ۱ = ۱$$
 میں گھٹایا جاسکتا ہے جس سے  $لا = ۱ ± ۱$  یعنی  

$$لا + \frac{۱}{لا} = ۱$$
 ،  $لا - \frac{۱}{لا} = ۱$   
 اور ان مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{۳ - \sqrt{۸ \pm ۱}}{۲} ، \frac{۳ + \sqrt{۸ \pm ۱}}{۲}$$



۲۔ مساوات

$$لا^۱ - لا^۳ + لا^۵ - لا^۵ + لا^۳ - لا^۱ = ۱$$

کی اصلیں معلوم کرو۔  
لا^۱ - ۱ سے تقسیم کرو جبکہ اختصاراً یوں کیا جاسکتا ہے:-

$$\begin{array}{r} ۱ - ۳ - ۵ - ۵ - ۳ - ۱ \\ ۱ - ۲ - ۳ - ۲ - ۱ \\ \hline ۰ - ۱ - ۲ - ۳ - ۲ - ۱ \end{array}$$

تو ہمیں منکافی مساوات ملتی ہے

$$لا^۱ - لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ + لا^۱ = ۱ \dots \dots \dots (۱)$$

$$یا (لا^۱ + \frac{۱}{لا}) - (لا^۲ + \frac{۱}{لا}) = ۳$$

وہ کی بجائے ی^۱ - ۴ ی^۲ + ۲ اور وہ کی بجائے ی^۱ - ۲ درج کرنے سے

$$ی^۱ - ۶ ی^۲ + ۹ = ۰ \text{ یعنی } (ی^۱ - ۳) = ۰$$

جس سے ی^۱ = ۳ اور ی = ± ۳

$$یعنی لا + \frac{۱}{لا} = ۳ \text{ ، } لا - \frac{۱}{لا} = ۳$$

اور ان مساواتوں کی اصلیں ہیں

$$\frac{لا - ۱}{۲} \pm \frac{۳ - ۱}{۲}$$

یہ اصلیں مساوات (۱) کی دوہری اصلیں ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^۵ - ۱ = ۰$$

کو حل کرو۔

اسکو لا - ۱ سے تقسیم کیا جائے تو

$$لا^۵ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$



جس سے حاصل ہوتا ہے

$$0 = 1 - y + y^2$$

(92)

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$0 = 1 + \frac{1}{p} (1 + \sqrt{5})$$

$$0 = 1 + \frac{1}{p} (1 - \sqrt{5})$$

اور پھر ان مساواتوں سے

$$0 = \frac{1}{p} \{ 1 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} \pm (1 + \sqrt{5}) \pm (1 - \sqrt{5}) \}$$

جہاں  $\sqrt{5} = 1$

اس جملہ سے لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔

$$0 = 1 + \frac{1}{p}$$

کے دو درجی اجزائے ضربی معلوم کرو۔

اس کو مستحیل کرنے سے

$$0 = 1 - y^3$$

$$y^3 = 1 \text{ اور } y = \pm \sqrt[3]{1}$$

اس لئے دی ہوئی مساوات کے دو درجی اجزائے ضربی ہیں

$$0 = 1 + \frac{1}{p} \pm \frac{1}{p} \sqrt{5}$$

۵ — مساواتوں

$$(1) (1 + \frac{1}{p}) = (1 + \frac{1}{p}) \quad (2) (1 + \frac{1}{p}) = (1 + \frac{1}{p})$$

کو حل کرو۔

$$y^2 = \frac{(1 + \frac{1}{p})}{1 + \frac{1}{p}} + \frac{(1 - \frac{1}{p})}{1 - \frac{1}{p}} \quad 6 —$$

کو ایسی مساوات میں تحویل کرو جو ی میں چوتھے درجہ کی ہو۔

$$\text{جواب :- } (1 - y) + (1 + y) + (1 + y^2) + (1 + y^3) = 0$$



## ۴۶۔ تنائی مساواتیں۔ عام خواص۔

تنائی مساواتوں کے اہم خواص اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں ثابت کئے جائیں گے۔

سُئلہ ۱۔ اگر  $\lambda = 1$  کی ایک خیالی اصل  $\epsilon$  ہو تو  $\epsilon$  بھی ایک اصل ہوگی جہاں  $m$  کوئی صحیح عدد ہے۔  
چونکہ  $\epsilon$  ایک اصل ہے اسلئے

$$\epsilon = 1 \text{ اور اسلئے } (\epsilon^n) = 1 \text{ یعنی } (\epsilon^m) = 1$$

یعنی  $\lambda = 1$  کی ایک اصل  $\epsilon$  ہے۔  
یہ بات مساوات  $\lambda + 1 = 0$  کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ  $m$  طاق عدد ہو۔

۴۷۔ اگر صحیح عدد  $m$  اور  $n$  ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو مساواتوں  $\lambda^m = 1$ ،  $\lambda^n = 1$  میں کوئی اصل سوائے اکائی کے مشترک نہیں ہو سکتی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم صحیح عددوں کی حسب ذیل خاصیت استعمال کرتے ہیں:-

اگر صحیح عدد  $m$  اور  $n$  ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہوں تو صحیح عدد  $a$  اور  $b$  معلوم کئے جاسکتے ہیں ایسے کہ  $m \cdot b - n \cdot a = 1$ ۔  
کیونکہ فی الحقیقت جب  $\frac{m}{n}$  کو ایک کسر مسلسل کی شکل میں لکھا جاتا ہے تو  $\frac{1}{n}$  وہ



تقرب ہے جو کسر  $\frac{1}{2}$  کے تقریبوں میں مابقی آخر واقع ہوتا ہے۔  
اب اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ دی ہوئی مساواتوں کی کوئی مشترک اصل  $e$

ہے۔ تب

$$e = 1 \text{ اور } e = 1$$

$$e = 1 \text{ اور } e = 1$$

اسلئے

$$(m - n) = 1 \text{ یعنی } e = 1 \text{ یا } e = 1$$

جس سے

یعنی دی ہوئی مساواتوں کی مشترک اصل صرف ۱ ہے۔

۴۸۔ مسئلہ ۳۔ اگر دو صحیح عددوں  $m$  اور  $n$  کا مقسوم علیہ اعظم  $k$

ہو تو مساواتوں  $la = 1$  اور  $la = 1$  کے درمیان مشترک اصلیں

مساوات  $la = 1$  کی اصلیں ہونگی۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$m = k \text{ م } ، n = k \text{ ن}$$

اب چونکہ  $m$  اور  $n$  ایسے عدد ہیں جو ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد

ہیں اسلئے ایسے صحیح عدد  $b$  اور  $d$  معلوم کئے جاسکتے ہیں کہ

$$m - n = 1 \text{ اور } 1 = \pm 1$$

$$m - n = 1 \text{ اور } 1 = \pm 1$$

پس

اسلئے اگر  $la = 1$  اور  $la = 1$  کی ایک مشترک اصل  $e$  ہو تو

$$(m - n) = 1 \text{ یعنی } e = 1$$

جس کے یہ معنی ہیں کہ مساوات  $la = 1$  کی ایک اصل  $e$  ہے۔



۴۹۔ مسئلہ ۴۔ اگر  $n$  ایک مفرد عدد ہو اور  $\lambda = 1$ ۔  $\alpha = 0$  کی کوئی خیالی اصل  $\epsilon$  ہو تو تمام اصلیں سلسلہ  $\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3, \dots, \epsilon^n$  میں شامل ہیں۔

کیونکہ مسئلہ (۱) سے یہ تمام مقداریں دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں اور یہ سب مختلف بھی ہیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ان میں سے کوئی دو اصلیں مساوی ہیں یعنی  $\epsilon^n = \epsilon^m$  تو

$$\epsilon^n = \epsilon^m$$

لیکن مسئلہ ۲ سے یہ ناممکن ہے کیونکہ  $n$  بالضرور (ف۔ ق) کے لحاظ سے  $n$  سے کم ہے مفرد ہے۔

۵۰۔ مسئلہ ۵۔ اگر صحیح عدد  $n$  کے اجزائے ضربی ف، ق، ر وغیرہ صحیح عدد ہوں تو مساواتوں  $\lambda = 1$ ،  $\alpha = 0$ ،  $\lambda = 1$ ،  $\alpha = 0$  وغیرہ کی اصلیں مساوات  $\lambda = 1$ ،  $\alpha = 0$  کو پورا کریں گی۔

مساوات  $\lambda = 1$ ،  $\alpha = 0$  کی ایک اصل  $\epsilon$  پر غور کرو تو  $\epsilon^n = 1$  جس سے

$$(\epsilon^n = 1) \text{ یعنی } \epsilon^n = 1$$

اس لئے مسئلہ ثابت ہے۔

۵۱۔ مسئلہ ۶۔ اگر عدد مرکب  $n$  کے اجزائے ضربی ف، ق، ر وغیرہ مفرد عدد ہوں تو مساوات  $\lambda = 1$ ،  $\alpha = 0$  کی اصلیں حاصل ضرب

$$(1 + \epsilon + \epsilon^2 + \dots + \epsilon^{f-1})(1 + \epsilon^q + \epsilon^{2q} + \dots + \epsilon^{(q-1)q})(1 + \epsilon^r + \epsilon^{2r} + \dots + \epsilon^{(r-1)r}) \dots$$



کی ن رقیں ہونگی جہاں لا۔ ا۔ کی ایک اصل ہے لا۔ ا۔

کی ایک اصل یہ، وغیرہ۔

ہم اسکوئین اجزائے ضربی ف، ق، ر کے لئے ثابت کرتے ہیں۔ عام صورت

میں اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ حاصل ضرب کی کوئی رقم

مثلاً عہ<sup>۱</sup> ب<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup> مساوات لا۔ ا۔ کی ایک اصل ہے کیونکہ عہ<sup>۱</sup> = ا۔<sup>۱</sup>۔  
ب<sup>۱</sup> = ا۔<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup> اور اسلئے (عہ<sup>۱</sup> ب<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup>) = ا۔ ا۔ اسکے علاوہ حاصل ضرب

کی کوئی دو رقیں مساوی نہیں ہو سکتیں کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ عہ<sup>۱</sup> ب<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup> دوسری رقم عہ<sup>۱</sup> ب<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup> کے مساوی ہے تو عہ<sup>۱</sup> = ب<sup>۱</sup> = ج<sup>۱</sup>۔

اس مساوات کا پہلا رکن مساوات لا۔ ا۔ کی اصل ہے اور دوسرا رکن مساوات

لا۔ ا۔ کی اصل ہے۔ اب ان دو مساواتوں میں کوئی اصل مشترک نہیں ہو سکتی

کیونکہ ف اور ق ر ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں (مسئلہ ۲)۔

پس عہ<sup>۱</sup> ب<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup>، عہ<sup>۱</sup> ب<sup>۱</sup> ج<sup>۱</sup> کے مساوی نہیں ہو سکتا۔

۵۲۔ مسئلہ۔ اگر ن = ف ق ر اور ن کے مفرد اجزائے

ضربی ف، ق، ر ہوں تو مساوات لا۔ ا۔ کی اصلیں شکل

عہ ب ج کے مشابہ ن حاصل ضربوں کے مساوی ہونگی جہاں

لا۔ ا۔ کی ایک اصل ہے، لا۔ ا۔ کی ایک اصل ہے، لا۔ ا۔ کی

ایک اصل جہ۔

یہ مسئلہ ۶ کی توسیع ہے جس میں ن کے مفرد اجزا ایک سے زیادہ

مرتبہ ن میں واقع ہوتے ہیں۔ اس کا ثبوت ثبوت بالا کے بالکل مشابہ



ہے۔ چنانچہ  $عہ = بہ$  جہ جیسا کوئی حاصل ضرب ایک اصل کے مساوی ہوگا کیونکہ  $عہ = ا، ب = ا، جہ = ا$  اور  $ف، ق، ر$  کا ایک ضعیف  $ن$  ہے دفعہ ۱۵ کے مماثل ثبوت سے یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ اس قسم کے کوئی دو حاصل ضرب مساوی نہیں ہو سکتے کیونکہ  $ف، ق، ب، ر$  ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں۔ سہولت کی خاطر ہم نے اس مسئلہ کو  $ن$  کے صرف تین اجزائے ضربی کے لئے بیان کیا ہے۔ عام صورت میں بالکل اسی قسم کا ثبوت دیا جاسکتا ہے۔ اس مسئلہ اور گزشتہ مسئلوں کی مدد سے اب ہم حسب ذیل عام نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں:-

اکائی کے  $ن$  ویں جذروں کو متعین کرنیکا سوال اس صورت میں تحویل ہوتا ہے جیسے  $ن$  مفرد عدد ہو یا مفرد عدد کسی قوت پر اٹھایا ہوا۔

(95)

۵۳۔ لا۔ ا۔ = کی خاص اصلیں۔ شکل لا۔ ا۔ = کی ہر مساوات کی چند ایسی اصلیں ہوتی ہیں جو اسی شکل کی مگر کمتر درجہ کی مساوات کی اصلیں نہیں ہوتیں۔ اس قسم کی اصلوں کو ہم اس مساوات کی خاص اصلیں یا اکائی کے خاص  $ن$  ویں جذر کہیں گے۔ اگر  $ن$  مفرد عدد ہو تو تمام خیالی اصلیں اس قسم کی اصلیں ہونگی۔ اگر  $ن = ف$  جہاں  $ف$  مفرد عدد ہے تو  $ن$  سے کمتر درجہ کی کوئی  $ن$  ویں اصل مساوات لا۔ ا۔ = کی اصل ہونی چاہئے۔ کیونکہ  $ف$  کا کوئی مقسوم علیہ  $ف$  کا بھی مقسوم علیہ ہے (سوائے خود  $ن$  کے)۔ پس  $ف (۱ - ا)$  اصلیں ایسی ہونگی جو  $ن$  سے کمتر درجہ کی کسی مساوات کی اصلیں نہیں ہونگی یعنی خاص اصلوں کی تعداد







اگر ایک خاص  $n$  واں جذر  $e$  دیا جائے تو ہم اکائی کے باقی تمام خاص  $n$  ویں جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

چونکہ  $e$  خاص جذر ہے اسلئے  $e^1, e^2, e^3, \dots, e^{n-1}$  مختلف  $n$  (98)

ویں جذر ہیں جیسا کہ ہم نے ابھی ثابت کیا۔ اب اگر اسی سلسلہ کا ایک جذر  $e^f$  لیا جائے جہاں  $f$   $n$  کے لحاظ سے مفرد ہے تو جذر

$e^f, e^{2f}, \dots, e^{(n-1)f}$  (ن۔ ۱)  $f, n$  (۱=۱)

سب مختلف ہیں کیونکہ  $e$  کی قوتوں کو جب  $n$  سے تقسیم کیا جاتا ہے تو ہر صورت میں باقی مختلف ہوتے ہیں یعنی عددوں کا سلسلہ  $1, 2, 3, \dots, n-1$  کسی ترتیب میں۔ پس جذریوں کا یہ سلسلہ وہی ہے جو قبل ازیں لکھا جا چکا ہے سوائے اسکے کہ یہاں  $f$  دوسری ترتیب میں واقع ہوتی ہیں۔ ہر عدد  $f$  کے جواب میں جو  $n$  کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹا ہو اکائی کا ایک خاص  $n$  واں جذر ہے کیونکہ  $e^{mf}$  ایک کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ  $m$   $n$  سے چھوٹا ہو، اگر ایسا ہو سکتا تو سلسلہ میں دو اصلیں ایک کے مساوی ہوتیں اور ایسی صورت میں سلسلہ سے تمام اصلیں حاصل نہ ہو سکتیں۔ اسلئے کسی ثنائی مساوات کی جس کا درجہ  $n$  سے کم ہو  $e^f$  اصل نہیں ہو سکتی یعنی  $e^f$  اکائی کا خاص  $n$  واں جذر ہے۔ یہ بات متذکرہ بالا ثابت شدہ نتیجہ کے مطابق ہے کیونکہ  $n$  سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد

صحیح عددوں کی تعداد عددوں کی ایک معلومہ خاصیت سے  $n$  (۱)  $(\frac{1}{n})$  (۱)  $(\frac{1}{n})$

ہے جبکہ  $n = f$  اور اتنی ہی تعداد مساوات  $n = 1$  کی خاص اصلوں کی ہے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا۔



## مثالیں

۱۔  $لا - ۱ = ۰$  کی خاص اصلیں متعین کرو۔  
 یہاں  $۳ \times ۲ = ۶$  اسلئے مساواتوں  $لا - ۱ = ۰$ ،  $لا - ۳ = ۰$  کی  
 اصلیں مساوات  $لا - ۱ = ۰$  کی اصلیں ہیں۔ اب  $لا - ۱$  کو  $لا - ۱$  سے تقسیم کرنے سے  
 $لا + ۱$  حاصل ہوتا ہے اور  $لا + ۳$  کو  $لا - ۱$  سے تقسیم کرنے سے  $لا + ۱$   
 حاصل ہوتا ہے۔ اسلئے  $لا - لا + ۱ = ۰$  سے  $لا - ۱ = ۰$  کی خاص اصلیں متعین ہونگی۔  
 اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے

$$\frac{۳ - لا - ۱}{۲} = ۰ \quad ، \quad \frac{۳ - لا + ۱}{۲} = ۰$$

نیز چونکہ  $ع = ۱ = ع$

اس لئے  $ع = ۰$

جسکی تصدیق یہ آسانی ہو سکتی ہے۔

اس لئے خاص اصلیں ہیں

$ع$ ،  $ع$  یا  $ع$ ،  $ع$  یا  $ع$ ،  $ع$  یا  $ع$

۲۔  $لا - ۱ = ۰$  کی خاص اصلوں پر بحث کرو۔

چونکہ ۱۲ کے مفرد اجزائے ضربی ۲ اور ۳ ہیں اور  $\frac{۱۲}{۲} = ۶$ ،  $\frac{۱۲}{۳} = ۴$

اسلئے  $لا - ۱ = ۰$  اور  $لا - ۱ = ۰$  کی اصلیں  $لا - ۱ = ۰$  کی اصلیں ہیں۔ اب  $لا - ۱$  کو  
 $لا - ۱$  اور  $لا - ۱$  سے تقسیم کیا جائے اور خارج قسموں کو صفر کے مساوی رکھا جائے  
 تو ہمیں دو مساواتیں  $لا + لا + ۱ = ۰$  اور  $لا + ۱ = ۰$  حاصل ہونگی اور یہ دونوں مساواتیں  
 $لا - ۱ = ۰$  کی اصلوں سے پوری ہونی چاہئیں۔ اس لئے  $لا + لا + ۱$  اور  $لا + ۱$   
 کا مقسوم علیہ اعظم لیکر اس کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساوات  $لا - لا + ۱ = ۰$   
 کی اصلیں خاص اصلیں ہونگی۔

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر ہم  $لا - ۱$  اور  $لا - ۱$  کے ذواضعاف اقل سے  $لا - ۱$  کو



تقسیم کرتے۔ اب متکافی مساوات  $لا - لا^۲ = ۱ + لا = ۱$  کو حل کرنے سے  $لا = \frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$  پس

$$\frac{لا^۲ - لا + ۱}{۲} = \left( \frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲} \right)^۲ = \frac{لا^۲ - لا + ۱}{۲}$$

مساوات  $لا - لا^۲ = ۱$  کی چار خاص اصلیں ہیں جہاں  $عہ$  اور  $عم$  دو خاص اصلیں ہیں۔

اب ہم ان چار خاص اصلوں کو ان میں سے کسی ایک اصل  $عہ$  کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔

$$\text{چونکہ } عہ + \frac{۱}{عہ} + عم + \frac{۱}{عم} = ۰ \text{ یعنی } (عہ + عم)(۱ + \frac{۱}{عہ عم}) = ۰$$

اس لئے ہم  $عہ عم = -۱$  لیتے ہیں (جو  $عہ$  اور  $عم$  کی قیمتوں کے مطابق ہے)

اور چونکہ  $لا + ۱ = ۰$  کی اصلیں  $عہ$  اور  $عم$  ہیں اسلئے  $عہ = -۱$  اور  $عہ = -\frac{۱}{عہ} = عم$ ۔

یعنی اصلیں  $عہ$ ،  $عم$ ،  $\frac{۱}{عہ}$ ،  $\frac{۱}{عم}$  سلسلہ  $عہ$ ،  $عہ$ ،  $عہ$  سے بیان ہو سکتی ہیں کیونکہ  $عہ^۲ = -۱$ ۔

نیز  $عہ$  کی بجائے  $عہ$ ،  $عہ$  رکھنے اور  $عہ$  کے قوت نماؤں سے ۱۲ کے ضعفوں کو خارج کرنے سے ہمیں حسب ذیل سلسلے بشمول سلسلہ بالا ملینگے

$$\begin{array}{cccc} عہ & ، & عہ & ، & عہ \\ عہ & ، & عہ & ، & عہ \\ عہ & ، & عہ & ، & عہ \\ عہ & ، & عہ & ، & عہ \end{array}$$

جہاں ہر صف اور ہر قطار میں وہی اصلیں تکرار پاتی ہیں، صرف انکی ترتیب بدلی ہوئی ہے اس لئے ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ یہ خاصیت چار اصلوں میں سے کسی ایک اصل سے مخصوص نہیں اور یہ ظاہر ہے کہ  $۱$ ،  $۵$ ،  $۱۱$  ایسے عدد ہیں جو ۱۲ کے لحاظ سے مفرد اور اس سے چھوٹے ہیں اور یہ بات اس عام نتیجہ کے مطابق ہے جس کو ہم نے



اس باب میں ثابت کیا ہے۔ لا<sup>۱</sup>۔ ۱ = کی سب اصلیں اسکی چار خاص اصولوں ع<sup>۱</sup> ع<sup>۲</sup> ع<sup>۳</sup> ع<sup>۴</sup> میں سے کسی ایک کی قوتوں سے حسب ذیل حاصل ہو سکتی ہیں:-

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ع}^1 & \text{ع}^2 & \text{ع}^3 & \text{ع}^4 & \text{ع}^5 & \text{ع}^6 & \text{ع}^7 \\ \text{ع}^2 & \text{ع}^3 & \text{ع}^4 & \text{ع}^5 & \text{ع}^6 & \text{ع}^7 & \text{ع}^8 \\ \text{ع}^3 & \text{ع}^4 & \text{ع}^5 & \text{ع}^6 & \text{ع}^7 & \text{ع}^8 & \text{ع}^9 \\ \text{ع}^4 & \text{ع}^5 & \text{ع}^6 & \text{ع}^7 & \text{ع}^8 & \text{ع}^9 & \text{ع}^{10} \\ \text{ع}^5 & \text{ع}^6 & \text{ع}^7 & \text{ع}^8 & \text{ع}^9 & \text{ع}^{10} & \text{ع}^{11} \\ \text{ع}^6 & \text{ع}^7 & \text{ع}^8 & \text{ع}^9 & \text{ع}^{10} & \text{ع}^{11} & \text{ع}^{12} \\ \text{ع}^7 & \text{ع}^8 & \text{ع}^9 & \text{ع}^{10} & \text{ع}^{11} & \text{ع}^{12} & \text{ع}^{13} \end{array}$$

۳۔ ثابت کرو کہ لا<sup>۱۵</sup>۔ ۱ = کی خاص اصلیں مساوات

$$\text{لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^3 - \text{لا}^4 + \text{لا}^5 = 0$$

(98)

کی اصلیں ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ مثال ماسبق کی آٹھ اصلیں مساوات لا<sup>۱</sup> + لا<sup>۲</sup> + لا<sup>۳</sup> = ۰ کی دو

اصولوں کو مساوات

$$\text{لا}^1 + \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \text{لا}^4 + \text{لا}^5 = 0$$

کی چار اصولوں سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

۵۔ بارہویں درجہ کی مساوات بتاؤ جس کی اصلیں لا<sup>۲</sup>۔ ۱ = کی خاص اصلیں

ہوں اور اسکو چھٹے درجہ کی مساوات میں تحویل کرو۔

$$\text{جواب :- لا}^1 - \text{لا}^2 + \text{لا}^3 + \text{لا}^4 + \text{لا}^5 + \text{لا}^6 + \text{لا}^7 + \text{لا}^8 = 0$$

۵۴۔ شنائی مساواتوں کو دائری تفاعلوں کے ذریعہ حل کرنا۔

ہم عام سے عام شنائی مساوات

$$\text{لا}^n = 1 + \text{ب} + \text{ب}^2 + \dots + \text{ب}^{n-1}$$

لیتے ہیں جہاں ۱ اور ب حقیقی مقداریں ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ } 1 = \text{کا حجم ع}^1 \text{ ب} = \text{کا جب ع}$$

$$\text{تو } \text{لا}^n = \text{کا (حجم ع}^1 + \text{ب} + \text{ب}^2 + \dots + \text{ب}^{n-1} \text{ جب ع)}$$

$$\text{اب اگر } \text{ر (حجم ط}^1 + \text{ب} + \text{ب}^2 + \dots + \text{ب}^{n-1} \text{ جب ط)}$$



اس مساوات کی ایک اصل ہو تو ڈیمو امر کے مسئلہ سے

$$r^n = (جم\ n\ طه + ا - جب\ n\ طه) = کا (جم\ عه + ا - جب\ عه)$$

$$\text{اور اسلئے} \quad r^n = جم\ n\ طه = کا\ جم\ عه$$

$$r^n = جب\ n\ طه = کا\ جب\ عه$$

ان کامربع لیکر جمع کرنے سے

$$r^{2n} = r^n \text{ یعنی } r^n = r^n$$

جہاں ہم  $r$  اور  $r^n$  دونوں کو مثبت لیتے ہیں کیونکہ زیر بحث جملوں میں اس جزو فرضی کو ہمیشہ مثبت لیا جاسکتا ہے جس میں زاویہ واقع ہوتا ہے۔  
پس

$$جم\ n\ طه = جم\ عه \text{ جب } جب\ n\ طه = جب\ عه$$

اور اس لئے

$$ن\ طه = عه + ک\ ۲$$

جہاں  $k$  کوئی صحیح عدد ہے۔ پس مفروضہ  $n$  ویں اصل کی عام شکل ہوگی

(99)

$$r^n = (جم\ عه + ا - جب\ عه) + \frac{ک\ ۲}{ن} \text{ جب } ا - جب\ عه + \frac{ک\ ۲}{ن}$$

اس جملہ میں  $k$  کو عددوں کے سلسلہ  $-\infty$  اور  $+\infty$  کے درمیان کوئی  $n$  منسلق قیمتیں دینے سے تمام  $n$  ویں اصلیں حاصل ہونگی اور یہ اصلیں تعداد میں  $n$  سے زیادہ نہیں ہونگی کیونکہ وہ ایک دور پورا ہونے کے بعد تکرار پائینگے۔

$n$  ویں اصل کے جملہ کو ہم شکل

$$\left\{ r^n = (جم\ عه + ا - جب\ عه) + \frac{ک\ ۲}{ن} \text{ جب } ا - جب\ عه + \frac{ک\ ۲}{ن} \right\}$$

میں لکھ سکتے ہیں۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ  $ا = ۱$  اور  $عه = ۰$  تو مساوات



لا<sup>ن</sup> = ۱ + ب - ا ہو جائیگی لا<sup>ن</sup> = ۱ + ۰ - ا = ۱ - ا اسلئے ۱ + ۰ - ا = لا<sup>ن</sup>  
یا اکائی کے ن ویں جذر کی عام شکل ہوگی

جم  $\frac{۲ ک ۲}{ن}$  + ۱ - ا جب  $\frac{۲ ک ۲}{ن}$   
اگر ہم ک کو کوئی 'مُعین' قیمت دیں مثلاً صفر تو

۱ - ا (جم  $\frac{۲ ک ۲}{ن}$  + ۱ - ا جب  $\frac{۲ ک ۲}{ن}$ )

۱ + ب - ا کا ایک ن واں جذر ہوگا۔

اس لئے پچھلے ضابطہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی خیالی مقدار کے

تمام ن ویں جذر ان میں سے کسی ایک جذر کو اکائی کے ن ویں  
جذروں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

ثنائی مساواتوں

$$لا^۱ = ۱ + ب - ا \text{ اور } لا^۲ = ۱ - ب - ا$$

کو ایک ساتھ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ سہ رخی

$$لا^۳ - ۲ ک ۲ جم عہ = لا^۱ + لا^۲$$

کے اجزائے ضربی

$$۱ - ا \left\{ جم \frac{۲ ک ۲}{ن} + ۱ - ا \right\} جب \frac{۲ ک ۲}{ن} عہ + ۱ - ا$$

ہیں جہاں ک قیمتیں ۱، ۲، ۳، ... (ن - ۱) اختیار کرتا ہے۔

مثالیں

۱ - مساوات لا<sup>۱</sup> = ۱ - ا کو حل کرو۔



اسکو لا۔ ۱ سے تقسیم کرو تو یہ متکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل ہو جائیگی  
پھر  $y = لا + \frac{۱}{لا}$  رکھنے سے کہی

$۱ + ی - ی^۲ = ۱$   
حاصل ہوگا جس کو حل کرنے سے دی ہوئی مساوات کا حل مل جائیگا۔  
۲۔  $(۱ + لا) - لا - اکو اجزائے ضربی میں تحویل کرو۔$

جواب :-  $لا(لا + ۱)(لا + لا + ۱)$   
۳۔ وہ مساوات معلوم کرو جس کے حل پر ثنائی مساوات لا۔ ۱ = ۱ کا حل منحصر ہے۔

جواب :-  $۱ + ی - ی^۲ = ۱$   
۴۔ اگر ثنائی مساوات کو  $(لا - ۱)$ ،  $لا + ۱$  یا  $لا - ۱$  سے تقسیم کر کے متکافی مساوات کی معیاری شکل میں تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ تحویل شدہ مساوات کی سب اصلیں خیالی ہوتی ہیں۔ (دیکھو صفحہ ۴۲) مثالیں ۱۵، ۱۶۔

۵۔ اگر اس تحویل شدہ مساوات کو  $y = لا + \frac{۱}{لا}$  رکھ کر تحویل کیا جائے تو ثابت کرو کہ  $y$  میں مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہوں گی اور وہ ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوں گی۔

کیونکہ  $لا$  میں دی ہوئی مساوات کی اصلیں  $جم + ۱ = ۱$  جب  $ع$  شکل کی ہوں گی (دیکھو دفعہ ۵۴)۔ پس  $لا + \frac{۱}{لا}$  کی شکل ۲ جم  $ع$  ہوگی اور اسکی قیمت حقیقی اور ۲ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔

۶۔ ثابت کرو کہ مساوات ذیل متکافی ہے۔ اس کو حل کرو:-

$$۴(لا - لا + ۱) - ۲(لا - لا - ۱) = ۰$$

جواب :- اسکی اصلیں ۲، ۲،  $\frac{۱}{۲}$ ،  $\frac{۱}{۲}$ ، ۱، ۱ ہیں۔

۷۔ مساوات لا۔ ۱ = ۱ کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اسکا حل تین کعبی مساواتوں

$$لا - ۱ = ۰، لا - ۳ = ۰، لا - ۳ = ۰$$



کے حل پر منحصر ہے جہاں سے، سے اکائی کے خیالی جذرا لکعب ہیں۔ اس طرح دی ہوئی مساوات کی تو اصلیں ہونگی

$$۱، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۵}، \frac{۱}{۶}، \frac{۱}{۷}، \frac{۱}{۸}، \frac{۱}{۹}، \frac{۱}{۱۰}$$

۱، سے کو چھوڑ کر باقی چھ اصلیں دی ہوئی مساوات کی خاص اصلیں ہونگی اور یہ اصلیں چھ درجی مساوات

$$۰ = ۱ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

کی اصلیں ہیں۔  
۸۔ دفعہ ۵۳ کی مثال ۳ میں آٹھویں درجہ کی مساوات کو  $۱ = \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۷} + \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۱۹} + \frac{۱}{۲۰}$  کے اندراج سے تحویل کیا جائے تو مساوات

$$۰ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۳} - \frac{۱}{۱۴} + \frac{۱}{۱۵} - \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۱۹} - \frac{۱}{۲۰}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس مساوات کی اصلیں ہیں

$$\frac{۲}{۱۵}، \frac{۲}{۱۶}، \frac{۲}{۱۷}، \frac{۲}{۱۸}، \frac{۲}{۱۹}، \frac{۲}{۲۰}$$

۹۔ مساوات

$$۰ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۴} - \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۱۷} + \frac{۱}{۱۸} - \frac{۱}{۱۹} + \frac{۱}{۲۰}$$

کو متکافی مساوات میں تحویل کرو اور اسکو حل کرو۔

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = ۱$$

$$\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۵}، \frac{۱}{۶}، \frac{۱}{۷}، \frac{۱}{۸}، \frac{۱}{۹}، \frac{۱}{۱۰}، \frac{۱}{۱۱}، \frac{۱}{۱۲}، \frac{۱}{۱۳}، \frac{۱}{۱۴}، \frac{۱}{۱۵}، \frac{۱}{۱۶}، \frac{۱}{۱۷}، \frac{۱}{۱۸}، \frac{۱}{۱۹}، \frac{۱}{۲۰}$$

۱۰۔ مساوات

$$۰ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۳} + \frac{۱}{۱۴} - \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۱۷} + \frac{۱}{۱۸} - \frac{۱}{۱۹} + \frac{۱}{۲۰}$$

اسکو حل کرو۔

اسکی اصلوں کو م سے تقسیم کرو تو متکافی مساوات حاصل ہوگی۔

۱۱۔ اگر مساوات  $\frac{۱}{۲} = ۱$  کی ایک خیالی اصل  $\frac{۱}{۲}$  ہو جہاں  $n$  عدد مفرد ہے تو



ثابت کرو کہ

$$(۱-عہ)(۱-عہ)(۱-عہ) \dots (۱-عہ) = ۱$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ کبھی مساوات فوراً متکافی شکل میں تھوٹل ہو سکتی ہے اگر اسکے سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۱۸ کا ربط موجود ہو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ چار درجہ فوراً متکافی شکل میں تھوٹل ہو سکتا ہے اگر سروں کے درمیان دفعہ ۲۴ مثال ۲۲ کا ربط موجود ہو۔

۱۴۔ وہ کبھی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ$$

جہاں عہ، مساوات لا۔ = ۱۔ کی ایک خیالی اصل ہے۔

جواب :- لا + لا - لا - لا = ۱۔

جب اس کبھی کی اصلیں معلوم ہو جاتی ہیں تو مساوات لا۔ = ۱۔ کا حل دو درجہ مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جاسکتا ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ کبھی کی تین اصلیں لا، لا، لا ہیں۔ تب لا - لا + لا + لا = ۱۔ کی اصلیں عہ اور عہ، لا - لا + لا = ۱۔ کی اصلیں عہ اور عہ اور لا - لا + لا + لا = ۱۔ کی اصلیں عہ اور عہ ہوں گی۔ یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ان کو تقریبی طور پر دسویں باب کے طریقوں کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

۱۵۔ وہ کبھی بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ + عہ$$

جہاں عہ، مساوات لا۔ = ۱۔ کی ایک خیالی اصل ہے۔

جواب :- لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۔

گزشتہ مثال کی طرح یہاں بھی جب کبھی کی اصلیں (جو سب حقیقی ہیں) معلوم ہو جاتی ہیں تو ثنائی مساوات لا۔ = ۱۔ کا حل دو درجہ مساواتوں کے ذریعہ مکمل کیا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ کبھی کی اصلیں لا، لا، لا، لا ہیں۔ اب یہ دیکھ لینا آسان ہے کہ لا - لا + لا + لا = ۱۔ کی اصلیں عہ + عہ اور عہ + عہ، لا - لا + لا + لا = ۱۔ کی اصلیں عہ + عہ اور عہ + عہ اور عہ + عہ اور لا - لا + لا + لا = ۱۔ کی اصلیں عہ + عہ اور عہ + عہ ہیں۔ جب



$${}^2_2C + {}^5_2C + {}^7_2C + {}^{11}_2C + {}^{15}_2C + {}^{13}_2C + {}^9_2C + {}^1_2C \equiv \text{عم}$$

ع۳ = ع۲ + ع۱ + ع۵ + ع۱۱ + ع۱۴ + ع۷ + ع۱۲ + ع۹

اب یہ بہ آسانی معلوم ہو گا کہ  $عم = عم + عم = م$  پس  $لا + لا = م$  کی اصلیں  $عم$  اور  $عم$  ہیں اور اس دو درجی کو حل کرنے سے معلوم ہو سکتی ہیں۔ پھر فرض کر

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم} = ع^1 + ع^2 + ع^3 + ع^4 + ع^5 \\ \text{جم} = ع^1 + ع^2 + ع^3 + ع^4 + ع^5 \end{array} \right.$$

تو یہ معلوم ہوگا کہ لا۔ عم۔ لا۔ ا۔ = کی اصلیں یہ، یہ اور لا۔ عم۔ لا۔ ا۔ = کی اصلیں

جہاں جسم ہیں۔ پھر انہیں سے ہر ایک کو دو حصوں میں جدا کرنے سے اور دو درجی بنا  
سے جس کی اصلیں مثلاً عہ + عہ<sup>۱۴</sup> اور عہ<sup>۱۳</sup> + عہ وغیرہ ہوں دو دو اصلوں کے مجموعے  
معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر آخر میں دو درجی مساواتوں کے حل سے خود اصلوں کو معلوم کیا جا  
سکتا ہے جیسا کہ گذشتہ مثالوں میں کیا گیا۔

ہے جیسا کہ سہ مساویوں میں لیا گیا۔  
یہ اور گزری ہوئی دو مثالیں گاس (Gauss) کے طریقہ کی مثالیں ہیں  
جو ثنائی مساوات لا۔ ۱ = ۱۔ کو جبری طور پر حل کرنے میں استعمال ہوتا ہے جبکہ ن عدد  
مفرد ہو۔ اس قسم کی مساوات کا حل ایسی مساواتوں کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے جن کا درجہ  
اس بڑے سے بڑے مفرد عدد سے اعلیٰ تر نہیں بنتا چون۔ ۱ کا جزو ضربی ہے۔ اگر  $n = 3$  یا  
تو حل نسبی کے حل پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ  $n = 1 = 3 \times 2$ ۔ اگر  $n = 4$  تو حل دو درجی مساواتوں  
کے حل میں تحویل ہو جاتا ہے کیونکہ  $n = 1 = 2^2$ ۔ گاس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے  
ن۔ ۱ خیالی اصلوں کو ہر صورت میں ان میں سے کسی ایک کی قوتوں کی بموجب کسی  
مناسب ترتیب میں مرتب کرنا ضروری ہے۔ عدد مفرد  $n$  کی "ابتدائی اصل"



(Primitive root) میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر اسکو صفر سے  $n-2$  تک متواتر قوتوں میں اٹھایا جائے اور ہر صورت میں  $n$  سے تقسیم کیا جائے تو  $n-1$  باقی سب کے سب مختلف ہوتے ہیں۔ (Serret's Cours d'Algebre Superieure vol. II) کسی مفرد عدد کی ایسی ابتدائی اصلیں متعدد ہوتی ہیں مثلاً  $13$  کی  $2, 6, 7, 9$  اور  $11$  کی  $2, 6, 7, 8$  کی  $5, 3, 4, 6$  اور  $10$  کی  $3, 7, 9$  اور  $12$  کی  $5, 7, 11$ ۔ گاس خیالی اصلوں کو اس طرح مرتب کرتا ہے کہ ان میں سے کسی ایک اصل  $e$  کے متواتر قوت نما، صفر سے  $n-2$  تک  $n$  کی کسی ابتدائی اصل کی متواتر قوتیں ہوں۔ مثلاً  $13$  کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل لی جائے اور  $2$  کی متواتر قوتوں کو  $13$  سے تقسیم کیا جائے تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملیگا:

$1, 2, 4, 8, 3, 6, 9, 5, 10, 12, 11$

اور اس لئے یہ باقی ترتیب کے ساتھ  $e$  کی متواتر قوتیں ہیں جبکہ قوتوں کو جو  $13$  سے متجاوز ہوں مساوات  $e^{13} = 1$  کے ذریعہ تحویل کر لیا گیا ہو۔ اگر  $e$  کی چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کے ساتھ ہی یہی سلوک کیا جاتا تو ہمیں باقیوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا:

$1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 12, 8, 4$

ان سلسلوں کا اوپر کے مفروضات کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ پہلی صورت میں (یعنی  $n=13$ ) بارہ اصلیں چار چار کے تین مجموعوں میں منقسم ہوئی ہیں اور دوسری صورت میں سولہ اصلیں آٹھ آٹھ کے دو مجموعوں میں۔ کسی صورت میں تقسیم کا طریقہ  $n-1$  کے اجزائے ضربی کی نوعیت پر منحصر ہوتا ہے اور عام صورت میں یہ بتانا مشکل نہیں کہ اس قسم کے کسی دو گروہوں کا حاصل ضرب دو یا اس سے زیادہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے جیسا کہ طالب علم کو اوپر کی مخصوص مثالوں سے واضح ہو گیا ہوگا۔

کسی خاص صورت میں گاس کا طریقہ استعمال کرنے کے لئے صرف چھوٹی سے چھوٹی ابتدائی اصل کا معلوم ہونا ضروری ہے اور اس کو بغیر کسی مشکل کے آزمائش سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ تین سادہ ترین مفرد عددوں  $2, 3, 5$  میں سے کوئی نہ کوئی  $10$  سے



۱۲  
۱۱  
۱۰  
۹  
۸  
۷  
۶  
۵  
۴  
۳  
۲  
۱

لا<sup>۲۵۴</sup> - ۱ = ۰ ہے۔  
۲۵۴ کے بعد آنے والا مفرد عدد جو اس شرط کو پورا کرے کہ  $n - 1 = 2^k$   
(جہاں  $k$  صحیح عدد ہے) ۲۵۵۳۴ ہے۔ اسلئے ہمیں ایسے عددوں کا سلسلہ  
۳، ۵، ۱۷، ۲۵۵۳۴، ..... ملیگا۔ گاس (*Disquisitiones Arithmeticae*) دفعہ  
۳۶۵ میں لکھتا ہے کہ ہندسی اعمال سے دائرہ کون مساوی حصوں میں تقسیم کرنا یا ان ضلعوں  
والا منظم کثیر الاضلاع بنانا ممکن ہے جبکہ  $n$  انہیں سے کوئی قیمت اختیار کرے۔  
۱۹۔ اگر مساوات

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

کی اصلیں عم، عم، عم، ..... ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$$\frac{1}{عم} + \frac{1}{عم} + \frac{1}{عم} + \dots + \frac{1}{عم} = \frac{1}{عم}$$



$$= 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(1)}{n!} + 1$$



$$1! \times (n-1)! \times (n-2)! \times \dots \times 2! \times 1! = n! \times (n-1)! \times (n-2)! \times \dots \times 1! \times 0!$$

کی اصلیں ہیں

جہان ہمارا ب = ف + ب = ۲ ق اور طہ اکائی کا پانچواں جذر ہے۔  
نوٹ :- جب کثیر درجی مساوات اس شکل میں تحویل ہوتی ہے تو اسکو فوراً  
حل کیا جاسکتا ہے۔

(۱) جب 'ف' > 'ق' تو ایک اصل حقیقی اور چار اصلیں خیالی ہیں۔

(۲) جب تک کہ قاتل تو تمام اصلیں حقیقی ہیں۔

(۳) جب  $ق = ۵$  تو ایک جزو منربی دو درجی جملہ کا مربع ہے۔

۲۴ — اگر طہ اکائی کا پانچواں حذر ہو تو حاصل ضرب

(ع + يه + جه) (ع + طه + يه + جه) (ع + طه + يه + جه) (ع + طه + يه + جه)

(ع + ط + ج)

کی قیمت معلوم کرو۔



جواب :-  $ع + ب + ج = ۵$  ع<sup>۲</sup> + ب<sup>۲</sup> + ج<sup>۲</sup> = ۵ (ع<sup>۲</sup> - ب<sup>۲</sup> - ج<sup>۲</sup>)

۲۵ — وہ چار درجی مسادات بناؤ جس کی اصلیں ہوں

ع + ۲ ع<sup>۲</sup> ، ع<sup>۲</sup> + ۲ ع<sup>۲</sup> ، ع<sup>۲</sup> + ۲ ع<sup>۲</sup> ، ع<sup>۲</sup> + ۲ ع<sup>۲</sup>

جہاں لا = ۱۔ کی ایک خیالی اصل ع ہے۔

جواب :- لا + ۳ لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۲</sup> - لا + ۳ لا<sup>۲</sup> = ۱۱۔



(105)

# چھٹا باب

## کعبی اور چار درجی کا جبری حل

۵۵ — مساواتوں کا جبری حل — کعبی اور چار درجی مساواتوں کے حل پر بحث کرنے سے پیشتر ہم چند تمہیدی باتیں بیان کرینگے تاکہ طالب علم ان عام اصولوں سے اچھی طرح واقف ہو جائے جن پر ان مساواتوں کا جبری حل منحصر ہوتا ہے۔ اس مقصد کو پیش نظر رکھ کر ہم اس دفعہ میں دو درجی مساوات (مساوات درجہ دوم) کے حل کے تین طریقے درج کرینگے اور ساتھ ہی یہ بھی بیان کرتے جائینگے کہ کس طرح ان طریقوں کو کعبی اور چار درجی مساواتوں کا جبری حل حاصل کرنے میں وسیع کیا جاسکتا ہے۔ بعد کے دفعات میں ہم ان اصولوں کی پوری تشریح کرینگے۔

(۱) حل کا پہلا طریقہ — اصل کھیلے عام شکل  $F + Maq$  فرض کرنے سے

چونکہ جملہ  $F + Maq$  کی دو اور صرف دو قیمتیں ہیں جبکہ جذر المربع کو دو ہر علامت  $(\pm)$  کے ساتھ لیا جاتا ہے اسلئے دو درجی کی اصل کے لئے ایسے جملہ کو فرض کرنا بالکل درست ہے۔ اسلئے  $La = F + Maq$  رکھ کر اس کو منطق بنانے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$La - 2F + Maq = 0$$

اب اگر یہ دی ہوئی دو درجی مساوات



$$لا + ف + لا + ق = .$$

کے ساتھ متماثل ہو تو

$$۲ ف = ف، ف - ق = ق$$

$$\frac{۲ ف + ف + لا + ق}{۲} = \frac{۲ ف + ف + لا + ق}{۲}$$

جو دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

کعبی مساوات کی صورت میں ہمیں معلوم ہو گا کہ

$$۳ ف + \frac{۱}{۲} اور ۳ ف + لا + ق (۳ ف + لا + ق)$$

دونوں شکلیں ایسی ہیں جو اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہیں کیونکہ ان جملوں کی تین اور صرف تین قیمتیں ہیں جبکہ جذرا لکعبوں کو عام سے عام صورت میں لیا جائے۔ چار درجی مساوات کی صورت میں ہمیں یہ معلوم ہو گا کہ

(108)

$$۴ ف + لا + ق، ۴ ف + لا + ق + لا + ق + لا + ق$$

دونوں شکلیں ایسی ہیں جو اصل کو تعبیر کرنے میں استعمال ہو سکتی ہیں کیونکہ ان جملوں سے لا کی چار اور صرف چار قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ جذرا لمربعوں کو دوہری علامت لگا دی جائے۔

(۲) حل کا دوسرا طریقہ۔ اجزائے ضربی میں تحویل کرنے سے۔

فرض کرو کہ دو درجی لا + ف + لا + ق کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کرنا مطلوب ہے۔ اس مقصد کے لئے ہم اسکو شکل

$$لا + ف + لا + ق + ط - ط$$

میں رکھتے ہیں اور ط کو اس طرح متعین کرتے ہیں کہ

$$لا + ف + لا + ق + ط - ط$$

کامل مربع ہو سکے۔ اب یہ جملہ کامل مربع ہو گا اگر



$$\frac{ف^۲ - ق^۲}{۲} = ق + ق = \frac{ف^۲}{۲} \text{ یعنی طه}$$

اس قیمت کو طہ کی بجائے درج کیا جائے تو

$$لا + ف + لا + ق \equiv \left( \frac{ف}{۲} + لا \right) - \left( \frac{اف - ق}{۲} \right)$$

پس ہم نے دو درجہ کو شکل ۲۔ ۱ میں تخیل کر دیا جس کے مفرد اجزائے

ضرری ع + و اور ع - وہیں -

اسی طرح ہم کبھی کو شکل

(دَل + لا م) - (لَ لَا + مَ) - لَ لَا عَ - و

میں تحویل کرینگے اور اسکا حل مساواتوں  $x = 6$ ،  $y = 6$ ،  $z = 6$  سے حاصل کرینگے۔

یہ بھی دکھایا جائیگا کہ چار درجی کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے مشکلوں

رَلْ لَا + مَ لَا + نَ - رَلْ لَا + مَ لَا + نَ

(لَا + ف + لا + ق) (لَا + ف + لا + ق)

(107)

میں سے کسی ایک میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ اور پھر دو دو درجی مساواتوں کو حل کرنے سے چار درجی کا مکمل حل معلوم کیا جاسکتا ہے یعنی پہلی صورت میں  $ل + ا + م + لا + ن = (ل + لا + م + لا + ن)$  کو اور دوسری صورت میں  $لا + ف + لا + ق = (لا + لا + ف + لا + ق)$  کو حل کرنے سے دئے ہوئے چار درجی کا مکمل حل معلوم ہوتا ہے۔

(۳) حل کا تیسرا طریقہ۔ اصولوں کے متشاکل تقاضوں سے۔

دو درجی مساوات  $لا + فا + ق = ۰$  پر غور کرو جس کی اصلیں

عہ اور بہ ہیں۔ اصلوں کے درمیان ربط ملیں گے

ع + ه = ف

عہدہ = ق



اگر ہم ان مساواتوں سے عہ اور بہ کو متعین کرنے کی کوشش کریں تو ہم ابتدائی مساوات پر پہنچ جائیں گے (دیکھو دفعہ ۲۴)۔ لیکن اگر ہمیں اصلوں اور سروں کے درمیان کوئی اور ربط معلوم ہو جائے جو ل عہ + م بہ = فا (ف' ق) کی شکل کا ہو تو ہم آسانی سے عہ اور یہ کو اس مساوات اور مساوات عہ + بہ = فاسی معلوم کر سکیں گے۔

دو درجی کی صورت میں مطلوبہ مساوات معلوم کرنے میں کوئی وقت نہیں ہے کیونکہ صریحاً

$$(عہ - یہ) = ف' - ق$$

$$اور اسلئے \quad عہ - بہ = ف' - ق$$

کعبی مساوات لا<sup>۱</sup> + ف' لا<sup>۲</sup> + ق لا<sup>۳</sup> + س = کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ کو معلوم کر نیکی لئے مساوات عہ + یہ + جہ = ف کے علاوہ ل عہ + م بہ + ن جہ = فا (ف' ق، س) کی شکل کی دو مساواتیں مطلوب ہوتی ہیں۔ آئندہ ہم ثابت کرینگے کہ ایک دو درجی مساوات کو حل کرنے سے تفاعلوں

$$(عہ + سہ بہ + سہ جہ) \quad (عہ + سہ بہ + سہ جہ)$$

کو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور جب ان تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں تو کعبی کی اصلیں آسانی سے معلوم کی جاسکتی ہیں۔

چار درجی مساوات

$$لا^۱ + ف' لا^۲ + ق لا^۳ + س لا^۴ =$$

کی صورت میں اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کو معلوم کر نیکی لئے مساوات عہ + بہ + جہ + ضہ = ف کے علاوہ

$$ل عہ + م بہ + ن جہ + ر ضہ = فا (ف' ق، س)$$

کی شکل کی تین مساواتوں کی ضرورت پڑیگی۔ دفعہ ۶۶ میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ حسب ذیل تین تفاعلوں



(بہ + جہ - عہ - ضہ) <sup>۲</sup> (جہ + عہ - ضہ - بہ) <sup>۲</sup> (عہ + بہ - جہ - ضہ) <sup>۲</sup>  
کو ایک کعبی مساوات کے حل کرنے سے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے  
اور جب انکی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو چار درجہ مساوات کی اصلیں فوراً حاصل  
ہو سکتی ہیں۔

۵۶۔ کعبی مساوات کا جبری حل۔ فرض کرو کہ عام کعبی مساوات

$$1\bar{1} + 3\bar{2} + 3\bar{3} + 3\bar{4} + 3\bar{5} + 3\bar{6} + 3\bar{7} + 3\bar{8} + 3\bar{9} + 3\bar{0} = 10$$

کوشکل

ی<sup>۳</sup> + ۳ + ی + گ = ۰

میں رکھا گیا ہے جہاں

عایا ہے جہاں  
 ی ≡ ۱ لا + ب'ھ ≡ ۱ ج - ب'گ ≡ ۱ د - ۳ ب'ج + ۲ ب'ب  
 ( دفعہ ۳۶ )

اس مساوات کو حل کر نیکی کے لئے فرض کرو

$$y = \overline{m} + \overline{m}$$

اس کا معب لینے سے

$$y = f + c + {}^3f + {}^3f + ({}^3f + {}^3f)$$

اس لئے

ی۔ ۳۔ ۳ ہاں ہاں ی۔ (ف + ق) = ۰۔

اب سروں کا مقابلہ کرنے سے

ہماق = ھ، ف + ق = گ

ان مساواتوں سے حاصل ہوگا

۱۔ اسل کو کارڈن کامل کہتے ہیں۔ دیکھو نوٹ ۱ اس جلد کے ختم پر۔



$$ف = \frac{۱}{۲}(-گ + ۲گ + ۳گ) \quad ق = \frac{۱}{۲}(-گ - ۲گ + ۳گ)$$

(109) اور ۳ق کی بجائے اسکی قیمت  $\frac{۳}{۲}ف$  درج کرنے سے

$$ی = ۳ف + \frac{۳}{۲}ف$$

اور یہ مساوات

$$ی + ۳ھ + گ = ۰$$

کا جبری حل ہے۔

یہ یاد رہے کہ اگر ف کی بجائے ق رکھ دیا جائے تو ی کی یہ قیمت نہیں بدلتی کیونکہ ایسا کرنے سے صرف رقوموں کا آپس میں تبادلہ ہوتا ہے۔

نیز چونکہ ۳ف کی تین قیمتیں ۳ف، ۲ف، ۱ف ہیں جو

ان میں سے کسی ایک کو اکائی کے تین جذرا لکعبوں سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہیں اسلئے ی کی تین اور صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں یعنی

$$۳ف + \frac{۳}{۲}ف، ۲ف + \frac{۳}{۲}ف، ۱ف + \frac{۳}{۲}ف$$

ان قیمتوں کی ترتیب صرف ف کے منتخب شدہ جذرا لکعب کی بموجب بدلتی ہے۔ اب اگر ی کی بجائے اس کی قیمت لا + ب رکھ دیا جائے تو

$$لا + ب = ۳ف + \frac{۳}{۲}ف$$

(جہاں ف کی قیمت وہ ہے جو سروں کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے) اور یہی مساوات لا + ۳ب + لا + ۳ج + لا + د = ۰

کا مکمل جبری حل ہے۔ اس میں جذرا لکعب اور جذرا المربع عام سے عام شکل میں



لئے گئے ہیں۔

۵۷۔ عددی مساواتوں پر استعمال۔ اگر کعبی کے سرے ہوئے عدد ہوں

تو کعبی کا حل جو ہم نے اوپر حاصل کیا ہے دو درجہ کے حل کے برخلاف کوئی عملی قیمت نہیں رکھتا حالانکہ جبری حل کے لحاظ سے یہ حل بالکل مکمل ہے۔  
کیونکہ جب کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں تو  $g^2 + 4h^3 = 0$ ۔  
جولانہ منفی عدد ہے (دیکھو دفعہ ۴۳) اور  $f$  اور  $q$  کی بجائے انکی قیمتیں

$$\frac{1}{2}(-g \pm \sqrt{g^2 - 4h})$$

(110)

ضابطہ  $f + q$  میں درج کیجائیں تو کعبی کی اصل کے لئے ہمیں حسب ذیل

جملہ ملیگا:-

$$\left( \frac{-g + \sqrt{g^2 - 4h}}{2} \right) + \left( \frac{-g - \sqrt{g^2 - 4h}}{2} \right)$$

اب ایسے ملتے عددوں کا جذر الکعب نکالنے کے لئے کوئی عام حسابی عمل موجود نہیں ہے اور اسلئے جہاں تک کہ حسابی عمل کا تعلق ہے یہ ضابطہ بیکار ہے۔  
لیکن جب کعبی کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہو تو ضابطہ

$$\left( \frac{-g + \sqrt{g^2 + 4h}}{2} \right) + \left( \frac{-g - \sqrt{g^2 + 4h}}{2} \right)$$

سے ایک عددی قیمت حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں  $g^2 + 4h$  مثبت ہے۔ لیکن یہ عمل بھی عددی کعبی کی حقیقی اصل معلوم کرنے کے لئے بے سود ہے۔  
پہلی صورت میں یعنی جب کعبی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے لئے ہم علم مثلث کا استعمال حسب طریقہ ذیل کر سکتے ہیں۔  
فرض کرو  $2$  کا جم نہ =  $-g$  اور  $2$  کا جب نہ =  $g$

$$f = \sqrt[3]{\frac{-g + \sqrt{g^2 - 4h}}{2}}, \quad q = \sqrt[3]{\frac{-g - \sqrt{g^2 - 4h}}{2}}$$

تو



نیز  $س ف = - ک$  اور  $ص = \frac{۱}{۴} (ک + گ) = \frac{۱}{۴} (س - ه) = \frac{۳}{۴}$

اور چونکہ  $س = جم = \frac{۲۲}{۳} \pm ۱ - ۱$  جب  $\frac{۲۲}{۳} = ۱ - ۱$  تو  $\frac{۲۲}{۳} = ۱ - ۱$   
اس لئے کعبی

$$۱ + ۳ ه + ی + گ = ۰$$

کی تین اصلیں

$$۳ ف + ۳ ه + ۳ ص + ۳ س = ۳ ف + ۳ ه + ۳ ص + ۳ س$$

ہو جاتی ہیں

$$۲ (س - ه) جم = ۲ (س - ه) جم = ۲ (س - ه) جم = ۲ (س - ه) جم$$

ان ضابطوں سے کعبی کی اصلوں کی عددی قیمتیں جیو ب اور جیو ب التمام کی جدول کے ذریعہ معلوم ہو سکتی ہیں۔ یہ طریقہ بھی عملی طور پر کچھ آسان نہیں اور عام طور پر تحقیقی اصلوں کو حسابی طریقہ سے محسوب کر نیکے لئے ان طریقوں کو استعمال کرنا چاہئے جو آئندہ دسویں باب میں بیان کئے جائینگے۔

(111)

۵۸۔ کعبی کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرنا۔ فرض کر دو

دے ہوئے کعبی

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ف (لا)$$

کو شکل

$$۱ + ۳ ه + ی + گ$$

میں رکھا گیا ہے جہاں  $ی = ۱ لا + ب$

اب فرض کرو

$$۱ + ۳ ه + ی + گ = ۱ + ۳ (۱ + ب) + ۱ + گ = ۵ + ۳ ب + گ$$



جہاں مہ اور نہ دریافت شدنی مقداریں ہیں۔ اس متبادل کی بائیں جانب کے جملہ کو مختصر کرو تو وہ ہو جائیگا

$$۱ - ۳ مہ نہ ی - مہ نہ (مہ + نہ)$$

سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$مہ نہ = ۳ مہ نہ (مہ + نہ) = گ$$

$$اسلئے \quad مہ + نہ = گ \quad مہ نہ = \frac{۱}{۳} \frac{گ}{۱}$$

$$جہاں \quad ۱ = گ + ۳ مہ نہ \quad حسب دفعہ ۴۲ -$$

$$نیز \quad (۱ + نہ) (۱ + مہ) = ی + گ - ی - ۳$$

اسلئے ی کی بجائے اسکی قیمت ۱ + لا + ب رکھنے پر ہمیں (۱) سے حاصل ہوگا

$$۱ + ف (لا) = (گ + ۱ + لا + ب) (۱ - گ - ۱ + لا + ب)$$

$$- (گ - ۱ + لا + ب) (گ + ۱ + لا + ب)$$

جو دو مکعبوں کا مطلوبہ فرق ہے۔

(112)

اس متبادل کی مدد سے کبھی کو مفرد اجزائے ضربی میں تحویل کیا جاسکتا ہے

اور کبھی مساوات کا مکمل حل معلوم ہو سکتا ہے۔ اب ہم مساوات ف (لا) = کی اصلیں مہ اور نہ کی رقوم میں حاصل کریں گے۔ مساوات

(مہ - نہ) ۱ + ف (لا) = مہ (۱ + نہ) - نہ (۱ + مہ) = ۰  
کو ثنائی کبھی کے طور پر حل کیا جائے تو ی = لا + ب کے لئے ہمیں حسب ذیل تین قیمتیں ملینگی:-

$$۱ + مہ (۱ + نہ) = ۰$$

$$۱ + نہ (۱ + مہ) = ۰$$







$$\frac{1}{3} \{ ع + ی + ج + ط (ع + س + ی + س + ج) + ط (ع + س + ی + س + ج) \}$$

کی تین قیمتیں ع، ی، ج ہیں جبکہ ط، قیمتیں ۱، ۲، ۳ اختیار کرے اسلئے یہ ظاہر ہے کہ اگر تفاعلوں

ط (ع + س + ی + س + ج) ط (ع + س + ی + س + ج) کو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکے تو ہم مندرجہ بالا خدایطہ میں ان قیمتوں کو درج کرنے سے کعبی مساوات کا جبری حل معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ان تفاعلوں کی قیمت ایک دو درجی مساوات کے حل کرنے سے بالمراسٹ حاصل نہیں ہو سکتی کیونکہ اگرچہ مندرجہ بالا دو تفاعلوں کا حاصل ع + ی + ج کا ایک منطق متشکل تفاعل ہے مگر انکا مجموعہ ایسا تفاعل نہیں ہے۔ اس کے باوجود یہ معلوم ہوگا کہ ان دو تفاعلوں کے لمعیوں کا مجموعہ اصلوں کا ایک متشکل تفاعل ہے اور اس لئے سروں کی رقوم میں بیاں ہو سکتا ہے جیسا کہ ہم اب بتائینگے۔ سہولت کے مد نظر ہم ترقیم ذیل اختیار کرتے ہیں

$$\begin{aligned} ل &= ع + س + ی + س + ج \\ م &= ع + س + ی + س + ج \end{aligned}$$

تو

$$\begin{aligned} (ط ل) &= (ل + ب + س + ج + س) \\ (ط م) &= (ل + ب + س + ج + س) \end{aligned}$$

جہاں

$$\begin{aligned} ل &= ع + ی + ج + ط + ع + ی + ج + ط = ۳(ع + ی + ج + ط) \\ ج &= ۳(ع + ی + ج + ط) \end{aligned}$$

اس لئے حاصل ہوتا ہے

$$ل + م = ۳ - ۳ = ۰ \quad ع + ی + ج = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \quad گ$$



(دیکھو مثال ۵ صفحہ ۶۰ اور مثال ۱۵ صفحہ ۶۹) -

نیز

$$(ط^۱)(ط^۲م) = ل = م = ع^۱ + ب^۱ + ج^۱ - ب^۲ - ج^۲ - ع^۲ - ع^۳$$

$$= ۹ - \frac{۵}{۲}$$

اس لئے دو درجی مساوات

$$ت^۱ + س^۱ گ - ت^۲ = \frac{۳}{۲} ۱ - \frac{۵}{۲}$$

کی اصلیں ہیں

$$(ع + س + ب + س^۲ + ع^۳) (ع + س^۲ + ب + س + ج^۳)$$

اس مساوات کی اصلوں کو یعنی

$$\frac{۳}{۲} (گ \pm ۱ گ^۲ + ۲ ۱ ۱)$$

(114) کو ت اور ت سے تعبیر کیا جائے تو ابتدائی ضابطہ سے جو کعبی کے سروں کی رقوم میں بیان ہو چکا ہے ہمیں تین اصلیں حاصل ہونگی

$$ع = ۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۳} (۱ ۱ + ۳ ۱ ۱)$$

$$ب = ۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۳} (س ۱ ۱ + س ۳ ۱ ۱)$$

$$ج = ۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۳} (س ۳ ۱ ۱ + س ۱ ۱ ۱)$$

یہاں یہ بات دیکھ لی جاسکتی ہے کہ 'ع'، 'ب'، 'ج' کی جن قیمتوں پر ہم پہنچے ہیں وہ اسی شکل کی ہیں جو دفعہ ۵۶ میں حاصل ہوئی تھیں۔  
تفاعلوں

$$(ع + س + ب + س^۲ + ع^۳) (ع + س^۲ + ب + س + ج^۳)$$



کی اس خاصیت کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ وہ تین مقداروں کے سادہ ترین  
تفاعل ہیں جنکی صرف دو ہیئتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو باہم کسی  
طرح ایک دوسرے کی جگہ بدل دیا جائے۔ انہی خاصیت کی بنیاد پر کبھی مساوات  
کا حل دو درجی مساوات کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے۔ عہ یہ کہ جب کے  
متعدد تفاعل ایسے ہیں جنہیں یہ خاصیت پائی جاتی ہے اور آئندہ چلکر یہ  
ثابت کیا جائیگا کہ کسی دو ایسے تفاعلوں میں ایک منطق خطی ربط موجود  
ہوتا ہے جو سروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔  
کبھی کو جبری طریقہ پر حل کرنے کے متعدد طریقوں پر مکمل بحث کر نیکی  
بعد ہم ایسی مثالیں درج کرتے ہیں جنہیں دفعتاً ماضی کے اصول استعمال  
میں آتے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ جملہ  
(بہ - جہ) (لا - عہ) + (لا - بہ) + (عہ - یہ) (لا - جہ)  
کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔  
فرض کرو  $ع = (بہ - جہ) (لا - عہ)$  و  $و = (جہ - عہ) (لا - یہ)$   
 $ھ = (عہ - یہ) (لا - جہ)$   
جواب :-  $\frac{1}{4} (ع + و + ھ) (ع + و + ھ)$

۲۔ ثابت کرو کہ نظام  
(بہ - جہ) (لا - عہ) = (جہ - عہ) (لا - بہ) = (عہ - یہ) (لا - جہ)  
کی مساواتوں میں دو اجزائے ضربی مشترک ہیں۔  
مثال ماضی کی ترقیم کو اختیار کرنے سے  
 $ع = و = ھ$

جس سے  $ع - و = (ع - و) (ع + و + ھ) = (ع - و) (ع + و + ھ)$   
کیونکہ  $ع + و + ھ = ۰$



اسلئے (یہ - جہ) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جہ) مطلوبہ مشترک جزو ضربی ہے جو دوسرے درجہ کا ہے۔

۳۔ حسب ذیل جملوں کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

(۱) (یہ - جہ) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جہ)

(۲) (یہ - جہ) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جہ)

(۳) (یہ - جہ) (لا - عہ) + (جہ - عہ) (لا - یہ) + (عہ - یہ) (لا - جہ)

ان کے اجزائے ضربی مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں حاصل شدہ نتیجوں کی مدد سے فوراً لکھے جاسکتے ہیں۔ مثال (۱) کی ترقیم استعمال کرنے سے اور مثال ۴ صفحہ ۸۲ میں عہ، یہ، جہ کی بجائے ع، و، ہ سے حسب ذیل اجزائے ضربی حاصل ہونگے:-

جواب:- (۱) ۳ ع و ہ (۲) ۵ (ع + و + ہ) ع و ہ

(۳) ۴ (ع + و + ہ) ع و ہ

۴۔ (لا - عہ) (لا - یہ) (لا - جہ)

کو دو مکعبوں کے فرق کی شکل میں بیان کرو۔  
فرض کرو

(لا - عہ) (لا - یہ) (لا - جہ) = ع - و - ہ

جس سے

ع - و - ہ = لہ (لا - عہ)

سہ ع - سہ و - سہ ہ = مہ (لا - یہ)

سہ ع - سہ و - سہ ہ = نہ (لا - جہ)

جمع کرنے سے

لہ + مہ + نہ = ۰، لہ عہ + مہ یہ + نہ جہ = ۰

اور اسلئے

لہ = مہ (یہ - جہ) مہ = نہ (جہ - عہ) نہ = عہ (عہ - یہ)

لیکن لہ مہ نہ = ۱ اس لئے



۱۔ 'مہ' نہ کی ان قیمتوں کو درج کرنے سے اور مثال (۱) کی تقسیم استعمال کرنے سے

$$۱۰ - ۱ = ۹ = ۱۰ \text{ ع } - ۱ \text{ سہ } = ۹ \text{ و } = ۱۰ \text{ و } ۱$$

$$۱۰ - ۱ = ۹ = ۱۰ \text{ ع } - ۱ \text{ سہ } = ۹ \text{ و } = ۱۰ \text{ و } ۱$$

$$(100 + 9^2 + 6) \sqrt{\quad} = 163$$

$$(20^2 + 9 + 6) \checkmark = 405$$

اور ع اور و پوری طرح معلوم ہوتے ہیں۔

۵۔ ثابیت شریک ل اور م اصولوں کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔  
ن کی تمام قیمتوں کے لئے

لی = ع + سہ بہ + سہ ا جہ = ع - ف + سہ (بہ - ف) + سہ (جہ - ف)  
 کیونکہ ا + سہ + سہ = ۔ ۔ اب ف کو متواتر ع، بہ، جہ قیمتیں دینے سے  
 لی کے لئے فرقوں بہ - جہ، ع - ع، بہ - کی ارقوم میں تین شکلیں حاصل  
 ہوتی ہیں۔ اسی طرح م کے لئے۔

۶۔ اصولوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو سروں کی رقوم میں بیان کرو۔

ہم جانتے ہیں کہ

$$ل + م = ۲ع - ب - ج + ل + م = (۲ب - ج - ع) م + ل$$

$$ل + م = (۲ج - ع - ب) م + ل$$

اور نیز

ل - م = (ب - ج) (س - س) = س - م = (ج - ع) (س - س)  
 س - ن = (ع - ب) (س - س)

ان سے ہمیں دفعہ ۲۶ کی طرح حاصل ہوگا

$$(2-3-4)(3-4-5)(4-5-6) = 5 + 6$$



$$ل^۳ - م^۳ = ۳ - ۱۳ (بہ - جہ) (عہ - یہ) \quad \text{اور اور چونکہ}$$

$$(ل^۳ - م^۳) = (ل^۲ + ل م^۲) - م^۳$$

اس لئے ل<sup>۳</sup> + م<sup>۳</sup> کی اور ل م کی قیمتوں کو درج کرنے سے جو دفعہ ۵۹ میں حاصل کیجا چکی ہیں حاصل ہوگا

$$(ل^۲ - جہ) (جہ - عہ) = ۲ - (بہ - یہ) (۲ - گ + م) \quad (دیکھو دفعہ ۴۲)$$

۷۔ تماثلات ذیل ثابت کرو:-

$$ل^۳ + م^۳ = \frac{۱}{۳} \{ (ل^۲ - جہ) (جہ - عہ) + (ل - جہ) (جہ - عہ) + (ل - عہ) (عہ - یہ) \}$$

$$ل^۳ - م^۳ = \frac{۱}{۳} \{ (ل^۲ - جہ) (جہ - عہ) + (ل - جہ) (جہ - عہ) + (ل - عہ) (عہ - یہ) \}$$

ل + م وغیرہ ل - م وغیرہ کی قیمتوں کو جو مثال مابقی میں دی گئی ہیں تیسری قوت پر اٹھانے اور جمع کرنے سے ہم بہ آسانی مذکورہ بالا تماثلات حاصل کر سکتے ہیں۔  
۸۔ عہ، یہ، جہ کے فرقوں کی رقوم میں ل<sup>۲</sup>، م<sup>۲</sup> وغیرہ کے لئے چلے معلوم کرو۔

$$(عہ + مہ + جہ) اور (عہ + مہ + جہ) میں سے$$

$$(عہ + یہ + جہ) = (۱ + مہ + جہ)$$

کو تفریق کرنے سے ل<sup>۲</sup> اور م<sup>۲</sup> کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہوتے ہیں:-

$$ل^۲ = (بہ - جہ) + مہ (جہ - عہ) + مہ (عہ - یہ)$$

$$م^۲ = (بہ - جہ) + مہ (جہ - عہ) + مہ (عہ - یہ)$$

اسی طرح ان جملوں سے ہم حاصل کرینگے



-  $\text{ل}^۱ = (\text{بہ} - \text{جہ})^۱ + (\text{سہ} - \text{جہ} - \text{عہ})^۱ + (\text{۲ بہ} - \text{جہ} - \text{عہ})^۱$   
 $+ (\text{سہ} - \text{عہ} - \text{بہ})^۱ + (\text{۲ جہ} - \text{عہ} - \text{بہ})^۱$   
 -  $\text{م}^۱ = (\text{بہ} - \text{جہ})^۱ + (\text{۲ عہ} - \text{بہ} - \text{جہ})^۱ + (\text{سہ} - \text{جہ} - \text{عہ})^۱$   
 $+ (\text{سہ} - \text{عہ} - \text{بہ})^۱ + (\text{۲ جہ} - \text{عہ} - \text{بہ})^۱$   
 نیز بغیر کسی وقت کے  $\text{ل}$  اور  $\text{ل}^۱$  کے لئے حسب ذیل جملے حاصل ہونگے:-

$$\text{ل}^۲ = (\text{بہ} - \text{جہ})^۲ + (\text{جہ} - \text{عہ})^۲ + (\text{عہ} - \text{بہ})^۲$$

$$\text{ل}^۲ = (\text{عہ} - \text{بہ})^۲ + (\text{بہ} - \text{جہ})^۲ + (\text{جہ} - \text{عہ})^۲$$

$$+ (\text{جہ} - \text{عہ})^۲ + (\text{عہ} - \text{بہ})^۲$$

۹-  $\text{ل}$  یا  $\text{م}$  کے نمونہ کے چھ تفاعل حسب ذیل ہیں

$$\begin{aligned} & \text{عہ} + \text{سہ} + \text{بہ} + \text{سہ}^۱ + \text{جہ}^۱ + \text{سہ}^۱ + \text{بہ}^۱ + \text{عہ}^۱ + \text{سہ}^۱ + \text{جہ}^۱ + \text{بہ}^۱ + \text{عہ}^۱ \\ & \text{عہ} + \text{سہ} + \text{بہ} + \text{سہ}^۱ + \text{جہ}^۱ + \text{سہ}^۱ + \text{بہ}^۱ + \text{عہ}^۱ + \text{سہ}^۱ + \text{جہ}^۱ + \text{بہ}^۱ + \text{عہ}^۱ \end{aligned}$$

وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ مقداریں ہوں -

ان تفاعلوں کو حسب طریقہ ذیل بیان کیا جاسکتا ہے :-

$$\begin{array}{ccc} \text{ل} & \text{سہ} & \text{ل} \\ \text{م} & \text{سہ} & \text{م} \end{array}$$

پس مساوات

$$(\text{فہ} - \text{ل})^۱ (\text{فہ} - \text{سہ})^۱ (\text{فہ} - \text{ل}^۱) (\text{فہ} - \text{سہ}^۱) (\text{فہ} - \text{م}) (\text{فہ} - \text{سہ}^۱})$$

$$= (\text{فہ} - \text{سہ}^۱})$$

$$\text{فہ}^۱ = (\text{ل}^۱ + \text{م}^۱) \text{فہ}^۱ + \text{ل}^۱ + \text{م}^۱ =$$

یا  
 کی اصلیں مندرجہ بالا مقداریں ہیں -

مساواتوں

$$\text{ل} = \frac{۵۹}{۲۱} ، \text{ل}^۱ + \text{م}^۱ = \frac{۲۷}{۳۱} \text{گ}$$

سے  $\text{ل}$  اور  $\text{م}$  کی بجائے انکی قیمتیں درج کرنے سے ہم اوپر کی مساوات کو سروں کی



رقوم میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں :-

$$فہ^۲ + ۳فہ - ۳ = \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

۱۰۔ ل اور م کی رقوم میں ایسی مساوات بناؤ جس کی اصلیں عام کبھی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔

فرض کرو کہ  $فہ = (عہ - یہ)^۲$

پس قبل الذکر نتیجوں سے

$$۱۰۔ م - ۳فہ = م - ل - م = م$$

اس کو منطبق بناؤ تو

$$فہ(فہ - ل - م) + (ل - م)^۲ = ۲۷$$

یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

اسی طرح مثال ۸ کے نتیجوں کی مدد سے اس مساوات کی مربع دار فرقوں کی

مساوات یا وہ مساوات جسکی اصلیں ہوں

(یہ - جہ) (۲عہ - یہ - جہ) (۲عہ - جہ - یہ) (۲عہ - جہ - یہ) (۲عہ - جہ - یہ)

حاصل ہوتی ہے اگر ہم آخری مساوات میں م اور ل کی بجائے علی الترتیب

- ل اور - م درج کریں اور اس عمل کو جتنی مرتبہ ہم چاہیں دہرا سکتے ہیں۔

بالآخر یہ سب مساواتیں کبھی کے سروں کی رقوم میں روابط

$$ل م = ۹ - \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} \text{ اور } ل + م = ۲۷ - \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲}$$

کی مدد سے یہ آسانی بیان ہو سکتی ہیں۔ مثلاً پہلی مساوات ہوگی

$$فہ(فہ + ۹ - \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲}) + ۲۷ + \frac{۳}{۲} \frac{۳}{۲} = ۲۷$$

(دیکھو دفعہ ۲۲)

(118)

۱۱۔ اگر کبھی مساواتوں



$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$$

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$$

کی اصلیں عہ، یہ، جہ اور عہ، یہ، جہ ہوں تو وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں تفاعل

$$فہ = عہ + عہ + یہ + جہ$$

کی چھ قسمیں ہوں۔  
عمل کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ پہلے ان کعبیوں کے لئے وہ مساواتیں

بنائی جائیں جنہیں دوسری قسمیں موجود نہ ہوں یعنی

$$۱ لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د = ۰$$

اور پھر مطلوبہ مساوات عام صورت میں ان سے اخذ کی جائے گی کیونکہ اس طور پر استحالہ شدہ کعبیوں کی صورت میں اصلوں کے دئے ہوئے تفاعل کے جواب میں تفاعل

$$فہ = (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ)$$

$$+ (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ)$$

حاصل ہوگا۔

استحالہ شدہ مساواتوں کی اصلوں کی بجائے ان کی قسمیں جنکو جذروں سے بیان کیا گیا ہے درج کرنے سے

$$فہ = (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ)$$

$$+ (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ)$$

جو شکل

$$فہ = ۳ (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ)$$

میں تحویل ہوتا ہے۔

اس کا کعب لینے سے حاصل ہوتا ہے

$$فہ = ۳ (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + ۳ (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ) + ۳ (۱ لا + عہ + عہ + یہ + جہ)$$



اب ف، ق اور ف، ق کی بجائے ان کی قیمتیں جو مساواتوں

$$لا + گ - لا - ھ = ۰ \quad لا + گ - لا - ھ = ۰$$

سے حاصل ہوتی ہیں درج کی جائیں تو ف، ق کی قیمتیں دو کعبی مساواتوں

$$ف - ۲ - ۲ ھ - ف - ۲ = (گ - لا + لا - ھ) = ۰$$

سے ملجائیں گی جہاں

$$لا = گ + ۲ ھ \quad اور \quad لا = گ + ۲ ھ$$

آخر الامر ف، ق کی بجائے اس کی قیمت لا - ف - ۳ ب - ب درج کرنے سے اور ان دو کعبیوں کو باہم ضرب دینے سے ہمیں مطلوبہ مساوات ملے گی۔ یہ یاد رہے کہ اگر ایک کعبی لا - ۱ = ۰ ہو تو ف - ۲ = ۲ ھ + ۲ ھ + ۲ ھ وغیرہ۔ اس صورت پر مثال ۴ میں غور کیا جا چکا ہے۔

۱۲۔ وہ مساوات بنائیں جس کی اصلیں س کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں

(119)

$$س = \frac{ع - ۲}{ع - ۲}$$

اور ع، ۲، ج مساوات لا + ۳ ب - لا + ۳ ج - لا + ۳ د = ۰ کی اصلیں ہیں۔ چونکہ س میں ع، ۲، ج کے صرف فرق اور ان کی قیمتیں شامل ہیں اس لئے نتیجہ وہی حاصل ہوگا اگر ہم ع، ۲، ج کی جگہ مساوات لا + ۳ ی - لا + ۳ گ = ۰ کی اصلیں س، ی، گ رکھیں۔ اس لئے

$$(۱ - س) ی = (۱ + س) ی$$

$$گ = ی، ی = (۱ + س) ی = \frac{(۲ - س)(۱ - س)}{۲(۱ + س)}$$

$$اور اسی طرح ھ = - \frac{(۱ + س - ۲)}{۲(۱ + س)}$$



ان سے ہم کو ساقط کر دیا جائے تو مطلوبہ مساوات ملے گی

$$h^3 = (1+s)(2-s)(1-s^2)k^2 + g^2(1+s^2) = 0$$

۱۳۔ کعبیوں

$$1 \text{ لا}^2 + 3 \text{ ب لا}^2 + 3 \text{ ج لا} + د = 0$$

$$2 \text{ لا}^2 + 3 \text{ ب لا} + 3 \text{ ج لا} + د = 0$$

کے سروں کے درمیان ربط معلوم کرو جبکہ اصولوں میں ربط

$$ع (ب - ج) + ب (ج - ع) + ج (ع - ب) = 0$$

موجود ہو۔

۱۴۔ سے سے ضرب دو تو یہ مساوات ہو جائیگی

$$ل م = ل م$$

کعب لیکر سروں کو داخل کرنے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہوگی

$$g^2 h^3 = g^2 h^3$$

۱۴۔ سروں اور اصولوں کی رقوم میں وہ شرط معلوم کرو کہ مثال ۱۳ کی

کعبی مساواتیں خطی استحال

$$لا = پ لا + ق$$

سے مماثل ہو جائیں۔

اس صورت میں

$$ع = پ ع + ق، ب = پ ب + ق، ج = پ ج + ق$$

پ اور ق کو ساقط کرنے سے

$$ب ج - ب ج + ج ع - ج ع + ع ب - ع ب = 0$$

جو اصولوں کا ایسا تفاعل ہے جس پر مثال ۱۳ میں غور کیا جا چکا ہے۔ مزید بریں یہ ربط

غیر متغیر رہتا ہے اگر ع، ب، ج، اور ع، ب، ج، کی بجائے

$$ل ع + م، ل ب + م، ل ج + م$$

$$ل ع + م، ل ب + م، ل ج + م$$



(120)

درج کئے جائیں۔ اس لئے ہم مثال ماسبق کی کعبی مساواتوں کو سادہ شکلوں

$$۱ + ۳ھ + ۵ = ۰ \quad ۱ + ۳ھ + ۵ = ۰$$

میں غور کر سکتے ہیں جو خطی استحالوں میں  $۱ + ۳ھ + ۵ = ۰$  یا  $۱ + ۳ھ + ۵ = ۰$  سے حاصل ہوتے ہیں۔ کیونکہ اگر شرط قبل الذکر مساواتوں پر صادق آتی ہے تو بعد الذکر مساواتوں پر بھی صادق آتی چاہیے۔

اب رکھو  $۱ = ۳ھ$  تو یہ مساواتیں مماثل ہو جائیں گی اگر

$$۱ = ۳ھ \quad ۱ = ۳ھ$$

ان سے  $۱$  کو ساقط کیا جائے تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$۱ = ۳ھ \quad ۱ = ۳ھ$$

یہ شرط وہی ہے جو مثال ۱۳ میں حاصل ہوئی تھی۔ یہ یاد رہے کہ کعبیوں کو متحول کرنے والے دو درجی اسی استحالہ یعنی

$$\frac{۱}{۳} (۱ + ۳ھ) = \frac{۱}{۳} (۱ + ۳ھ)$$

سے مماثل ہوتے ہیں۔

۶۰۔ کعبی کی دو اصلوں کے درمیان ہم رسم ربط۔ چار درجی کی بحث

شروع کرنے سے پیشتر ہم کعبی کے لئے حسب ذیل اہم مسئلہ ثابت کرتے ہیں:-

کعبی کی اصلوں میں سے دو دو اصلوں کے درمیان سروں کی

رقوم میں ایک ہم رسم ربط ہوتا ہے۔

دفعہ ۲۷ کی ۱۳ ویں اور ۱۴ ویں مثالوں سے ہم جانتے ہیں کہ

$$\{ (۱ - ۳ھ) + (۳ھ - ۵) + (۵ - ۱) \} = ۱۸ (۱ - ۳ھ)$$

$$\{ (۱ - ۳ھ) + (۳ھ - ۵) + (۵ - ۱) \} = ۹ (۱ - ۳ھ)$$

$$\{ (۱ - ۳ھ) + (۳ھ - ۵) + (۵ - ۱) \} = ۱۸ (۱ - ۳ھ)$$



ترتیب

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$

کو استعمال کرنے ، اوپر کی مساواتوں کو علی الترتیب عہ بہ عہ - (عہ + بہ) ۱ سے ضرب دینے ، حاصل ضربوں کو جمع کرنے اور اس کا لحاظ رکھنے سے کہ

$$عہ - عہ (عہ + بہ) + عہ بہ = ۰ ، یہ - یہ (عہ + بہ) + عہ بہ = ۰$$

بہیں حاصل ہوگا

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$

لیکن

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$

(دیکھو دفعہ ۴۲) - اس لئے

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$

(121)

اور اس لئے

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$

جو مطلوبہ ہم رسم ربط ہے۔ یہ شایدہ طلب ہے کہ اس مساوات کے سروں میں ایک غیر منطق مقدار شامل ہے جس کی دوسری علامت سے اصلوں کے ایک مختلف زوج کے درمیان ہم رسم ربط حاصل ہوگا۔

۶۱۔ چار درجی کا پہلا جذروں کے ذریعہ۔ یوں کہ مفروضہ۔

فرض کرو کہ چار درجی مساوات

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$

کو شکل (دفعہ ۳۷)

$$۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲ = ۱۰۱ - ۱۰۲$$



میں لکھنا گیا ہے جہاں

سی  $\equiv$  لا + ب ،      ه  $\equiv$  ج - ب<sup>۲</sup> ،

ع ≡ ۱ س - ۴ ب + ۳ ج ' ,

گ = د - ۳ + ۲ ب ج + ۳

اس مساوات کو حل کر نیکی لئے (جسمیں دوسری رقم موجود نہیں ہے) یوں ایک اصل کے لئے حسب ذیل عام جملہ مان لیتا ہے:-

$$y = \overline{m} + \overline{m} + \overline{m}$$

مرج لینے سے

ی' - ف - ق - ر = ۲ (ماق مار + مار ماف + ماف ماق)

پھر مربع لینے اور تحویل کرنے سے ہمیں مساوات حاصل ہوگی

یٰ-۳ (ف + ق + ر) یٰ-۲ - ۸ یٰ ف ماق مہ

$$+ (ف + ق + ر) - (ق + ر + ف) = 0$$

اس مساوات کا مقابلہ قبل الذکر مساوات سے کیا جائے تو

ف + ق + ر = ۳ هـ ق + ر + ف = ۳ هـ -  $\frac{ع}{۲}$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اور اس لئے ف، ق، ر، مساوات

$$t^3 + 3t^2 + t + \left(\frac{e^2}{2} - 3h^2\right)t - \frac{g}{2} = 0 \dots (1)$$

کی اہلیں ہیں۔ یا چونکہ

- گ = ن ه - ر ه ع + ر ہے (دفعہ ۳)

جہاں ہے  $\equiv$  ۱ ج س + ۲ ب ج د - ۱ د س - ۲ ب ج - ۳ ج



(122)

اسلئے یہ مساوات شکل

۴ (ت + ہ) - ۳ (ا ع (ت + ہ) + د ہے = .  
میں لکھی جاسکتی ہے اور ت + ہ = د رکھنے سے بالآخر ہمیں مساوات  
۴ د ط - ع د ط + جے = .

حاصل ہوتی ہے۔ اس کو ہم چار درجی مساوات کا محمول کعبی کہیں گے اور

آئندہ اس کو اسی نام سے موسوم کریں گے۔ جب مساواتوں (۱) اور (۲) میں  
تینز پیدا کرنا ضروری ہو جائے تو ہم قبل الذکر مساوات کو لو لڑ کا کعبی کہیں گے۔  
نیز چونکہ ت = ب - ا ج + د ط اس لئے اگر کعبی تکی حاصل کریں  
ط، ط، ط، ط ہوں تو

$$ف = ب - ا ج + د ط، ق = ب - ا ج + د ط،$$

$$ر = ب - ا ج + د ط$$

اور اسلئے

$$ی = ب - ا ج + د ط، ب - ا ج + د ط، ب - ا ج + د ط، ب - ا ج + د ط$$

اگر اس ضابطہ کو ی میں چار درجی مساوات کی ایک اصل قرار دیا جائے  
تو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ شامل ہونے والے جذر عام سے عام شکل میں نہیں  
ہیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ی کی چار قیمتوں کی بجائے آٹھ قیمتیں ضابطہ سے  
حاصل ہوتیں۔ ٹھیک ٹھیک فید ربط

$$ماف ماق مار = - \frac{گ}{۲}$$

سے عاید ہوتی ہے (جس کو مربع لینے میں نظر انداز کر دیا گیا ہے) جس کی  
بموجب مقداروں ماف، ماق، مار میں سے ہر ایک کو ایسی



مقداروں ہاں ہاں ہاں کے وہ سب ممکن اجتماع ہیں جو

(123)

$$y = \frac{g}{2h} - \frac{g}{2h}$$

یہ ضابطہ ایسا ہے جو ہر قسم کے ابہام سے پاک ہے کیونکہ اس سے

ی کی چار اور صرف چار قسمیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ہفت اور ہفت کو دوہری

علامتیں لگا دی جائیں۔ ظاہر ہے کہ پہلی دو مقداروں کو جو علامتیں دی جائیں گی ان کے لحاظ سے تیسری رقم کے نسبت نما کی علامت متعین ہو جائیگی۔ بالآخر ف، ق اور ی کو ان کی وہ قیمتیں دینے سے جو اوپر حاصل کی گئی ہیں ہمیں حاصل ہوگا



$$1 \text{ لا} + \text{ب} = \text{ا} \text{ب}^2 - \text{ا} \text{ج} + \text{ا}^2 \text{طہ} + \text{ا} \text{ب}^2 - \text{ا} \text{ج} + \text{ا}^2 \text{طہ}$$

گ

$$2 \text{ ا} \text{ب}^2 - \text{ا} \text{ج} + \text{ا}^2 \text{طہ} + \text{ا} \text{ب}^2 - \text{ا} \text{ج} + \text{ا}^2 \text{طہ}$$

جو چار درجی مساوات کا مکمل جبری حل ہے جس میں طہ اور طہ مساوات

$$3 \text{ ا}^2 \text{طہ} - \text{ع} \text{ا} \text{طہ} + \text{جے} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ چار درجی کے حل کی شکل کے متعلق یولر کا مذکورہ بالا بظاہر اختیاری

مفروضہ جائز و درست ہے کیونکہ ہم دیکھتے ہیں کہ ی میں جو مساوات ہے اس کی دوسری رقم موجود نہ ہونے کی وجہ سے اس کی چار اصلوں کا مجموعہ صفر ہے

یعنی  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$  اور اسلئے تفاعل  $(1 + 2 + 3 + 4)$  وغیرہ

جو عام طور پر تعداد میں چھ ہونگے (چار مقداروں میں سے دو دو کے اجتماع) اس صورت میں صرف تین ہیں۔ اس طرح ہم مان سکتے ہیں

$$(1 + 2 + 3) = (1 + 2 + 4) = 10 \text{ ف}$$

$$(1 + 2 + 4) = (1 + 3 + 4) = 10 \text{ ق}$$

$$(1 + 3 + 4) = (2 + 3 + 4) = 10 \text{ ر}$$

جس سے  $1, 2, 3, 4$  ی، ی، ی، ی ضابطہ

$$1 + 2 + 3 + 4$$

میں شامل ہو جاتے ہیں۔

اب ہم یولر کے کبھی (۱) کی اصلوں اور نیز محمول کبھی (۲) کی اصلوں کو



لا میں دئے ہوئے چار درجی کی اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں بیان کرینگے۔ جذروں کی علامتوں کے متعلق جو باتیں اوپر بیان کی گئی ہیں ان کو پیش نظر رکھ کر ہم ی  $\equiv ۱ + لا + ب$  کی چار قیمتیں لکھ سکتے ہیں جو حسب ذیل ہیں:-

$$۱ + عہ + ب = لا - باق - باق - باق$$

$$(۳) \quad ۱ + بہ + ب = لا - باق + باق - باق - باق$$

$$۱ + جہ + ب = لا - باق - باق + باق - باق$$

$$۱ + ضہ + ب = لا - باق + باق + باق - باق$$

جن سے پورے کعبی کی اصلوں ف، ق، ر کے لئے حسب ذیل جملے فوراً اخذ کئے جاسکتے ہیں:-

$$ف = \frac{۱}{۱۶} (بہ + جہ - عہ - ضہ)$$

$$(۴) \quad ق = \frac{۱}{۱۶} (جہ + عہ - بہ - ضہ)$$

$$ر = \frac{۱}{۱۶} (عہ + بہ - جہ - ضہ)$$

مساواتوں (۳) میں سے دو دو مساواتیں لیکر عمل تفسیق سے اور ف، ق، ر اور طہ، طہ، طہ کے درمیان مندرجہ بالا رابطوں کو استعمال کرنے سے ہم یہ آسانی حسب ذیل کارآمد روابط حاصل کرتے ہیں جو کعبیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے فرقوں کو چار درجی کی اصلوں کے فرقوں سے ملاتے ہیں:-

$$۴ (ق - ر) = ۴ (طہ - طہ) = ۴ (بہ - جہ) (عہ - ضہ)$$

$$(۵) \quad ۴ (ر - ف) = ۴ (طہ - طہ) = ۴ (جہ - عہ) (بہ - ضہ)$$

$$۴ (ف - ق) = ۴ (طہ - طہ) = ۴ (عہ - بہ) (جہ - ضہ)$$



بالآخر ان مساواتوں سے ربط طہ<sub>۱</sub> + طہ<sub>۲</sub> + طہ<sub>۳</sub> = . کے ذریعہ ہم  
طہ<sub>۱</sub>، طہ<sub>۲</sub>، طہ<sub>۳</sub> کی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں اخذ کرتے ہیں:-  
۱۲ طہ<sub>۱</sub> = (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - بہ) (جہ - ضہ)  
۱۲ طہ<sub>۲</sub> = (عہ - بہ) (جہ - ضہ) - (جہ - ضہ) (عہ - بہ)  
۱۲ طہ<sub>۳</sub> = (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) (بہ - ضہ)

(125)

## مثالیں

۱۔ جب چار درجی کی دو اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی دو اصلیں  
مساوی ہونگی اور بالعکس۔

۲۔ جب چار درجی کی تین اصلیں مساوی ہوں تو محول کعبی کی سب اصلیں

صفر ہونگی اور اس لئے ع = ج = ب = ض۔ جب چار درجی مساوی اصلوں کے دو غلطہ جوڑے رکھتا ہو تو یولر کے  
کعبی کی اصلیں صفر ہوتی ہیں اور اسلئے

گ = .، ر = ع - ۱۲، ہ = .۔  
۳۔ اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے چار درجی اور یولر کے کعبی کے درمیان

روابط ذیل ثابت کرو:-

(۱) جب چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو یولر کے کعبی کی تمام اصلیں  
حقیقی اور مثبت ہونگی۔

(۲) جب چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہوں تو یولر کے کعبی کی تمام اصلیں  
حقیقی ہونگی جنہیں سے دو منفی اور ایک مثبت ہوگی۔

(۳) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو خیالی ہوں تو یولر کے کعبی کی  
دو اصلیں خیالی اور ایک اصل مثبت اور حقیقی ہوگی۔

یہ نتیجے مساواتوں (۲) سے بہ آسانی حاصل ہوتے ہیں اگر ف، ق، ر کی  
قیمتوں میں عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے مناسب شکلیں درج کی جائیں۔ یہ یاد رہے کہ  
یہاں تمام ممکن صورتیں بیان کر دی گئی ہیں اور چار درجی کے متعلق یہ فرض کیا گیا ہے کہ



اس کی اصلیں مساوی نہیں ہیں۔ ان میں سے ہر مسئلہ کا عکس بھی درست ہے پس جب یو لے کے کبھی کی تمام اصلیں حقیقی اور مثبت ہوں تو ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ چار درجی کی تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ اور جب یو لے کے کبھی کی اصلیں منفی ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہیں اور جب یو لے کے کبھی کی اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۵۔ ثابت کرو کہ چار درجی کی اصلوں اور محول کبھی کی اصلوں کے درمیان حسب ذیل ربط موجود ہوتے ہیں :-

(۱) اگر چار درجی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یا سب کی سب خیالی تو محول کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہونگی اور اس کے برعکس جب محول کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو چار درجی کی اصلیں یا تو سب کی سب حقیقی ہونگی یا سب کی سب خیالی۔  
(۲) جب چار درجی کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں تو محول کبھی کی دو اصلیں خیالی ہونگی اور اس کے برعکس جب محول کبھی کی دو اصلیں خیالی ہوں تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

یہ نتیجہ مثال باسقی سے فوراً اخذ ہو سکتے ہیں کیونکہ کبھیوں (۱) اور (۲) کی اصلوں کے درمیان ایک حقیقی خطی ربط موجود ہوتا ہے۔

۶۔ جب  $\Delta$  مثبت ہو تو چار درجی خیالی اصلیں رکھیں گے۔  
کیونکہ اسی صورت میں یو لے کے کبھی کی سب اصلیں مثبت نہیں ہو سکتیں۔  
۷۔ جب  $\Delta$  منفی ہو تو چار درجی کی دو اصلیں حقیقی ہونگی اور دو اصلیں خیالی۔

کیونکہ اسی صورت میں محول کبھی کی دو اصلیں خیالی ہونگی (مثال ۱۲ صفحہ ۱۸۴)  
۸۔ جب  $\Delta$  اور  $\Delta'$  دونوں مثبت ہوں تو چار درجی کی تمام اصلیں خیالی ہونگی۔

کیونکہ جب مثبت ہونے کی وجہ سے محول کبھی کی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی۔ اس لئے یو لے کے کبھی کی بھی ایک اصل حقیقی اور منفی ہوگی اس وجہ سے کہ  $t = \lambda \mu$  اور  $\Delta$  مثبت ہے۔ یہ مثال (۴) کی صورت (۲) ہے۔



اس ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ پہلا سر ۱ مثبت ہے۔ اگر جے کی بجائے ۱ جے مسئلہ بالا میں درج کیا جائے تو اگر کسی علامت کی قید لگانا ضروری نہیں۔  
۹۔ ثابت کرو کہ دو چار درجی مساواتوں

$$x^4 + y^4 + z^4 \pm 2xyz = 0$$

کا محول کعبی ایک ہی ہے۔

۱۰۔ دو چار درجی مساواتوں

$$x^4 - y^4 \pm 8xyz + (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x - y) = 0$$

کا محول کعبی معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } -x^3 - y^3 - z^3 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

۱۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\{x^4 - y^4 \pm 8xyz + (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x - y)\}^2 = 4xyz(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(x - y)$$

کی آٹھ اصلیں ضابطہ

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 1 = 0$$

(مثال ۲۰ صفحہ ۴۴ کے ساتھ مقابلہ کرو۔)

سے حاصل ہوتی ہیں۔

۱۲۔ اگر مساوات

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 1 = 0$$

کی ایک اصل

$$x^4 + y^4 + z^4 + x^3 + y^3 + z^3 + x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 1 = 0$$

ہو تو ل، م، ن کی رقوم میں ہ، ع، جے معلوم کرو۔

$$\text{جواب: } -x^3 - y^3 - z^3 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$



۱۳۔ وہ ضابطے لکھو جو چار درجہ کی اہل کو خاص صورتوں ع = اور جے = میں بیان کریں۔

۱۴۔ اصلوں عہدہ، چہ، ضہ کی رقوم میں محول کعبی کی مدد سے ع اور جے کو بیان کرو۔  
(دیکھو دفعہ ۲، مثالیں ۱۸، ۱۶)

۱۵۔ اصولوں سے پہلے، جہاں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کو  
ع اور جے کی رقوم میں بیان کرو۔

مندرجہ بالا مساواتوں (۵) اور مساوات (۴) صفحہ ۱۱۷ کی مدد سے ہم مطلوبہ حاصل ضرب حاصل کرتے ہیں۔

١) (ج - ح) (ع - هـ) (غ - ف) (ي - ق) (ك - ج) (خ - د)

$$(12 - 2 - 8) 254 =$$

۱۶۔ اہل کو بیان کر نیوالے جملہ میں آخری جذرا المربع کی علامت میں (یعنی اس علامت جذر میں جو محمول کعبی کے حل میں جذرا الکعب میں واقع ہوتا ہے) کوئی مقدار ہے۔  
جواب:۔ ۲۴ ہے۔ ع

۱۷ — ثنابت کرو کہ چار درجی مساوات

$$= 1 + U_1 r + U_2 r^2 + U_3 r^3 + U_4 r^4 + U_5 r^5$$

کی مربع دار قزاقوں کی مساوات کے سر، لب، ھ، ع اور جے کی رقوم میں بیان  
کئے جا سکتے ہیں۔

(127)

مساوات سے دوسری رقم خارج کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$= \frac{25-6}{2} + 6 \frac{2}{2} + 6 \frac{4}{2} + 6$$

اور اصلوں کی علامتیں بدلنے سے

$$= \frac{{}^2_5 h^3 - e^2}{f^2} + 6 \frac{g^2}{f^2} - 6 \frac{h^4}{f^2} + \frac{2}{6}$$



ان استحالوں سے تفاعلوں (عہ - یہ) ، وغیرہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا لیکن  
 موخر الذکر مساوات میں 'گ' ہو جاتا ہے اور اس کے دوسرے سر غیر متغیر  
 رہتے ہیں۔ اس لئے مربع دار فرقوں کی مساوات کے سروں میں 'گ' صرف حقیقت  
 قوتوں میں داخل ہو سکتا ہے۔ اور دفعہ ۳ کی متماثل مساوات کی مدد سے 'گ' سابقہ  
 کیا جاسکتا ہے اور 'ب' ، 'ع' ، 'ھ' ، 'جے' داخل کئے جاسکتے ہیں۔ اسی طرح ہم بتا  
 کر سکتے ہیں کہ اصلوں 'عہ' ، 'یہ' ، 'جہ' ، 'ضہ' کے فرقوں کا ہر حقیقت تفاعل 'ب' ، 'ھ' ، 'ع' ، 'جے'  
 کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور اس میں 'گ' طاق قوتوں میں داخل نہیں ہوتا۔

۶۲۔ جذروں کے ذریعہ چار درجی کا دوسرا حل۔ فرض کرو کہ

چار درجی مساوات

$$۱ا + ۲ب + ۳ج + ۴لا + ۵س = ۰$$

حسب سابق شکل

$$۱ا + ۲ھ + ۳ی + ۴گ + ۵ع - ۳ھ = ۰$$

میں رکھی گئی ہے جہاں  $۱ا + ۲ب = ۳ی$

اس مساوات کی اصل کے لئے اب ہم جملہ

$$۱ا = ۲ا + ۳ا + ۴ا + ۵ا$$

فرض کرتے ہیں جس میں تین غیر تابع جذر 'ا' ، 'ا' ، 'ا' شامل ہیں۔  
 دو مرتبہ مربع لینے سے اور تحویل کرنے سے

$$(۱ا - ۲ا - ۳ا - ۴ا - ۵ا) = ۲(۱ا - ۲ا - ۳ا - ۴ا - ۵ا) + (۲ا + ۳ا + ۴ا + ۵ا)$$

$$۱ا - ۲ا - ۳ا - ۴ا - ۵ا = ۲(۱ا - ۲ا - ۳ا - ۴ا - ۵ا) + (۲ا + ۳ا + ۴ا + ۵ا)$$

$$+ (۲ا + ۳ا - ۴ا - ۵ا) = ۲(۲ا + ۳ا - ۴ا - ۵ا) + (۲ا + ۳ا - ۴ا - ۵ا)$$

اس مساوات کا مقابلہ 'ی' کی قبل الذکر مساوات کے ساتھ کیا

جائے تو



$$ق + ر + ف + ق = ۳ - ۲ھ - ۱ق - ۱گ$$

$$ف + ق + ر = ۱۲ - ۱ع - ۱گ$$

جس سے ظاہر ہے کہ 'ق'، 'ر'، 'ف' مساوات  
 $۱گ + (۱۲ - ۱ع - ۱ق) - ۱ھ - ۱گ + ۱گ = ۰$   
 کی اصلیں ہیں۔

(128)

اس مساوات کو یہ آسانی یوں رکے کعبی میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ یا بلاواسطہ

$$ت = \frac{۱گ}{۱۲ - ۱ع - ۱ھ}$$

کے اندراج سے اور  $۱گ$  کی بجائے اس کی قیمت  $۱ع$ ،  $۱ھ$ ،  $۱ج$  کی رقوم  
 میں رکھنے سے ہم اس کو محول کعبی کی معیاری شکل یعنی شکل  
 $۱۲ - ۱ع - ۱ھ - ۱ج = ۰$   
 میں تحویل کر سکتے ہیں۔

حل کے اس طریقہ میں ہمیں کسی ایسے ابہام سے جو دفعہ ۶۱ میں واقع  
 ہوا تھا واسطہ نہیں پڑتا۔ کیونکہ  $۱$  کی قیمت کے طور پر جو جملہ یہاں مان لیا گیا  
 ہے اس کی صرف چار قیمتیں ہیں حالانکہ دفعہ ماضی میں  $۱$  کے لئے جو  
 شکل اختیار کی گئی تھی اسکی آٹھ قیمتیں تھیں۔ یہ بات اسوجہ سے ہے کہ شامل  
 ہونے والے جذر دو ہری علامت رکھتے ہیں متماثلہ مساوات

$$۱(۱ق + ۱ر + ۱ف + ۱ر)$$

$$= ۱(۱ق + ۱ر + ۱ف - ۱ق - ۱ر)$$

سے یہ امر بالکل واضح ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس دفعہ کے جذری  
 جملہ کی قیمتوں کی تعداد اتنی ہی ہے جتنی  $(۱ق + ۱ر + ۱ف)$  کی قیمتوں کی







۸ گ

$$-r = 1 = \frac{عہ + ب - جہ - ضہ}{عہ + ب - جہ - ضہ} + ب = \frac{۱}{(عہ + ب - جہ - ضہ)^2}$$

۶۳۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرتا۔ فرض کرو کہ

چار درجی

$$۱ لا + ۲ ب لا + ۳ ج لا + ۴ د لا + ۵ س$$

کو دو مربعوں کے فرق مثلاً کی شکل یعنی شکل

$$(۱ لا + ۲ ب لا + ۳ ج لا + ۴ د لا + ۵ س) - (۲ ب لا + ۳ ج لا + ۴ د لا + ۵ س)$$

میں بیان کیا گیا ہے۔

دے ہوئے چار درجی کو ۱ سے ضرب دو اور اس جملہ کے ساتھ اسکا مقابلہ کرو تو ذیل کی مساواتیں مقداروں 'ن' اور طہ کو متعین کرنے کے لئے حاصل ہونگی۔

$$م' = ب' - ۱ ج' + ۱ طہ' = م' - ب' ج' - ۱ د + ۱ ب طہ'$$

$$ن' = (ج' + ۱ طہ') - ۱ س$$

ان مساواتوں سے ہر اور ن کو ساقط کرو تو

$$۴ ۱ طہ' - (۱ س - ۲ ب د + ۳ ج' + ۱ طہ' + ۱ ج س + ۲ ب ج د$$

$$- ۱ د' - س ب' - ج' = ۰$$

جو وہی محول کعبی ہے جسکو پہلے حاصل کیا جا چکا ہے۔

۱۔ چار درجی کو دو مربعوں کے فرق میں تحلیل کرنا سب سے پہلا طریقہ تھا جو

درجہ چہارم کی مساوات کے حل کے لئے استعمال کیا گیا تھا۔ اصل کا یہ طریقہ فیاری

(Ferrari) نے دریافت کیا تھا۔ اگرچہ بعض مصنف اس کو سیمپسن (Simpson)

سے منسوب کرتے ہیں۔ (دیکھو نوٹ ۱)۔

دفعہ آئندہ میں جو طریقہ بیان کیا گیا ہے اس میں چار درجی کو بالراست دو درجی اجزائے

کے حاصل ضرب کے مساوی رکھا گیا ہے یہ طریقہ ڈیکارٹ کا طریقہ ہے۔



(130)

اس مساوات سے طہ کی تین قیمتیں (طہ<sub>۱</sub>، طہ<sub>۲</sub>، طہ<sub>۳</sub>) ملتی ہیں جن کے جواب میں م<sup>۲</sup>، م<sup>۱</sup>، ن<sup>۲</sup> کی تین قیمتیں ملیں گی۔ پس چار درجی کی مفروضہ شکل کے تمام سر تین جداگانہ طریقوں سے متعین ہوتے ہیں۔ مزید بریں یہ ظاہر ہے کہ م کی ہر قیمت کے جواب میں ن کی ایک واحد قیمت ملتی ہے کیونکہ

$$م<sup>۱</sup> = ب<sup>۲</sup> - ج - د + ۱۲ ب طہ$$

چار درجی

$$(۱۲ لا + ۲ ب لا + ج + ۱۲ طہ) - (۲ م لا + ن)$$

کو صریحاً دو درجی اجزائے ضربی

$$۱ لا + ۲ ب لا + ج + ۱۲ طہ - ۲ م لا - ن$$

$$۱ لا + ۲ ب لا + ج + ۱۲ طہ + ۲ م لا + ن$$

اور

یعنی

$$۱ لا + ۲ (ب - م) لا + ج + ۱۲ طہ - ن$$

$$۱ لا + ۲ (ب + م) لا + ج + ۱۲ طہ + ن$$

اور

میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ اگر طہ کو اس کی تین قیمتیں طہ<sub>۱</sub>، طہ<sub>۲</sub>، طہ<sub>۳</sub> دیا جائے تو ابتدائی چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی کے تین زوج حاصل ہوتے ہیں اور مسئلہ بالکلیہ حل ہو جاتا ہے۔

اس حل اور جذروں والے حل میں جو تعلق ہے اسکو واضح کرنے کے لئے فرض کرو کہ مندرجہ بالا ترتیب میں لکھے ہوئے دو درجی اجزائے ضربی کی اصلیں یہ، جہ اور عہ، ضہ ہیں اور یہ کہ دو درجی اجزائے بقیہ زوجوں کی اصلیں سیطاح جہ، عہ اور بہ، ضہ، عہ بہ اور جہ، ضہ ہیں تو

$$بہ + جہ = \frac{۲}{۱} (ب - م) (جہ + عہ) = \frac{۲}{۱} (ب - م) (عہ + بہ) = \frac{۲}{۱} (ب - م) (م)$$

$$عہ + ضہ = \frac{۲}{۱} (ب + م) (بہ + ضہ) = \frac{۲}{۱} (ب + م) (جہ + ضہ) = \frac{۲}{۱} (ب + م) (م)$$



جہاں

$$\sqrt{ب^2 - ا ج + ج^2} = م, \sqrt{ب^2 - ا ج + ج^2} = م$$

$$m = \sqrt{b^2 - 1 - c^2}$$

ان آخری مساواتوں میں سے دو مساواتیں لیکر ایک کو دوسری میں سے تفریق کیا جائے تو

$$y + j - e - \text{ض} = \frac{1}{1} \quad j + e - y - \text{ض} = \frac{1}{1}$$

$$x + y - z = 2 \quad \frac{1}{2}$$

اور چونکہ

$$\frac{1}{2}x^2 = x^2 + x + x + x + x$$

اس لیے

$$1\psi + 2\psi + 1\psi = 4\psi$$

$$1 + 1 - 1 = 1 + 1$$

$$1j + 1b = 1a - 1a + 1a = 1a$$

رضه + ب = ۵ - ۱ - ۵ - ۲ - ۵ - ۳

اس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ چار درجہ کی اعلیٰ یہاں ایسے ضابطوں

(131)

سے علیحدہ علیحدہ بیان ہوئی ہیں جو دفعہ ۶۱ کے ضابطوں کے مماثل ہیں۔

۱۱ کی تینیں یعنی ص، ص، ص فی الحقیقت یوں کے کعبی کی اصلوں

کے مماثل ہیں۔ نیز م، ص، ص میں شامل ہونیوالے جذروں کی

علامتوں پر ایسی قید موجود ہے جو دفواۓ میں عائد کردہ قید کے مشابہ ہے کیونکہ دو درجی اجزاء کی ضربی کی اصلوں کے لحاظ سے جو مفروضات اوپر تسلیم کئے گئے ہیں



ان کی وجہ سے ہمیں مساوات  
 $(ا + ب + ج - ع - ض) (ج + ع - ب - ض) (ع + ب - ج - ض) = ۶۲$   
 ملتی ہے جو ربط ذیل کو مستلزم ہے (دیکھو مثال ۲۰ صفحہ ۷۲)

$$۶۲ = ۲۱ + ۲۱ + ۲۰$$

اور اس ربط کے ذریعہ ۶۲، ۲۱، ۲۱ کی علامتیں مقید ہوتی ہیں جیسا کہ  
 دفعہ ۱۱ میں واضح کیا جا چکا ہے۔

اس آخری مساوات کی مدد سے ہم ۶۲ کو اصلوں کے جملوں سے  
 ساقط کر سکتے ہیں اور اس طرح چار درجی کی سب اصلوں کو (جیسا کہ دفعہ ۱۱  
 میں کیا گیا) ایک واحد ضابطہ میں یعنی

$$۱۱ + ۲۱ = ۲۱ + ۲۱ - \frac{۶۲}{۲۱}$$

میں حاصل کرتے ہیں جس میں جذور

$$۲۱ = ۱۱ + ۲۱ - \frac{۶۲}{۲۱} \text{ اور } ۲۱ = ۱۱ + ۲۱ - \frac{۶۲}{۲۱}$$

پوری عمومیت کے ساتھ لئے گئے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ۱، ۲، ۳ نہ ہوں یعنی

$$۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

چار درجی کے دو درجی اجزاء کے ضربی کے آخری سروں کو جمع کرنے سے

$$۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

$$۱ + ۲ + ۳ = ۶$$



جہاں  $\text{طہ}_1$ ،  $\text{طہ}_2$ ،  $\text{طہ}_3$  محول کعبی کی اصلیں ہیں۔ پس مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے  
(دیکھو دفعہ ۳۹، مثالیں ۴، ۵)۔

جواب :- (۱ لا - ج ۲) - ۳ ع (۱ لا - ج ۲) + ۱۶ جے = ۰  
۲ - مثال ما سبق کی مساواتوں کے ذریعہ محول کعبی کی اصلوں کو چار درجی کی  
اصلوں کی رقوم میں بیان کرو۔

(182)

ج ۲ کی بجائے اسکی قیمت عہ، یہ، جہ، ضہ کی رقوم میں درج کرنے  
سے فوراً معلوم ہوتا ہے کہ

۱۲ طہ = ۱۲ لہ - مہ - نہ  $\equiv$  (جہ - عہ) (بہ - ضہ) - (عہ - یہ) (جہ - ضہ)  
۱۲ طہ = ۲ مہ - نہ - لہ  $\equiv$  (عہ - بہ) (جہ - ضہ) - (بہ - جہ) (عہ - ضہ)  
۱۲ طہ = ۳ نہ - لہ - مہ  $\equiv$  (بہ - جہ) (عہ - ضہ) - (جہ - عہ) (بہ - ضہ)  
۳ - مثال (۱) میں  $\text{طہ}_1$ ،  $\text{طہ}_2$ ،  $\text{طہ}_3$  کے لئے جو جملے حاصل ہوئے ہیں انکے  
ذریعہ دفعہ ۶۱ مثال ۵ کے اُن نتیجوں کی تصدیق کرو جن سے چار درجی اور محول کعبی کی  
اصلیں مربوط ہوتی ہیں۔

۴ - وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہوں

$\frac{1}{x} (بہ - جہ - عہ - ضہ) (بہ + جہ - عہ - ضہ) \frac{1}{y} (جہ - عہ - نہ - لہ) (جہ + عہ - نہ - لہ) (بہ - ضہ)$

$\frac{1}{x} (عہ - بہ - جہ - ضہ) (عہ + بہ - جہ - ضہ)$

چار درجی کے دو درجی اجزائے ضربی سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{۴}{۱} = بہ + جہ - عہ - ضہ - \frac{۱۲}{۱} = بہ - جہ - عہ - ضہ$$

نیز  $۴ د = ب ج - ۱ د + ۱۲ ب طہ = ۱ - ۱ فہ$

جہاں مطلوبہ کعبی کی اصلیں  $\text{فہ}_1$ ،  $\text{فہ}_2$ ،  $\text{فہ}_3$  سے تعبیر کی گئی ہیں۔

اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک خطی استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔

جواب :- (۱ فہ + ب ج - ۱ د) - ۳ ع (۱ فہ + ب ج - ۱ د) - ۲ ب جے = ۰



۵۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہیں

$$\frac{بہ - جہ - عہ - ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} ، \frac{بہ - جہ - عہ - ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ} ، \frac{بہ - جہ - عہ - ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ}$$

اگر فہ ان میں سے کسی تفاعل کو بلا امتیاز تعبیر کرے اور اس کے جواب میں محول کعبی کی اصل طہ سے تعبیر ہو تو پچھلے نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\frac{ب ج - د ۱ + ۱۲ ب ط}{ب ۲ - د ج + ۱ ط} = \frac{د ن}{۲}$$

اور اسلئے ہم مطلوبہ مساوات محول کعبی کے ایک ہم رقم استحالہ سے حاصل کرتے ہیں۔  
اس ضابطہ کو زیادہ سہولت بخش شکل

$$\frac{۱ گ}{۱ ط - ۵} = ب + فہ$$

میں رکھا جاسکتا ہے جسکے ذریعہ مطلوبہ کعبی شکل ذیل میں حاصل ہوتا ہے:-

$$۱ گ (۱ فہ + ب) + (۱ ط - ۵) (۱ فہ + ب) = ۱ گ$$

$$- ۱ گ (۱ فہ + ب) = ۱ گ$$

جس کو پھیلا کر ۱ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱ گ (۱ فہ + ب) + (۱ ط - ۵) (۱ فہ + ب) = ۱ گ$$

(دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۱۲)

(133)

۶۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں ہیں

$$\frac{۱}{۴} (بہ - جہ - عہ - ضہ) ، \frac{۱}{۴} (بہ - جہ - عہ - ضہ) ، \frac{۱}{۴} (بہ - جہ - عہ - ضہ)$$

یہ ۱ کی تین قیمتیں ہیں دیکھو دفعہ ۳۔ پہلے کی طرح انہیں سے کسی قیمت کو فہ سے تعبیر کیا جائے تو مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رقم استحالہ



$$\frac{۲ب ج د - ۱ د - ۱ س + ۲ا + ۱۲ب د ط}{ج - ۱ ط}$$

کے ذریعہ حاصل ہو سکتی ہے۔  
۷۔ وہ مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\frac{۶}{۶} \quad \frac{۶}{۶} \quad \frac{۶}{۶}$$

$$\frac{۶}{۶} \quad \frac{۶}{۶} \quad \frac{۶}{۶}$$

$$\frac{۶}{۶} \quad \frac{۶}{۶} \quad \frac{۶}{۶}$$

مطلوبہ مساوات محول کعبی سے ہم رسم استحالہ

$$\frac{۲ف = ج د - ۱ب س + ۱۲د ط}{د - ج س + ۱س ط}$$

کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے۔

اس نتیجہ کو مثال ۵ سے اخذ کیا جاسکتا ہے وہ اس طرح کہ اصلوں کو ان کے متکافیوں میں تبدیل کیا جائے اور اس تبدیلی کے جواب میں سوں میں تبدیلیاں عمل میں لائی جائیں۔

۶۳۔ چار درجی کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرنا۔ دوسرا طریقہ

فرض کر دو کہ چار درجی

$$\frac{۱لا + ۲ب لا + ۶ج لا + ۴د لا + ۱س}{کو دو درجی اجزائے ضربی}$$

$$\frac{۱(لا + ۲ف لا + ق)}{۱(لا + ۲ف لا + ق)}$$

میں تحلیل کیا گیا ہے۔ ان دو شکلوں کا مقابلہ کرنے سے

$$\left\{ \begin{array}{l} ۲ف + ق = ۲ب + ق + ق + ۴ف + ق = ۶ج \\ ۲ف + ق = ۲ب + ق + ق + ق = ۱س \end{array} \right. \quad (۱)$$



اب اگر ہمارے پاس شکل

فا (ف، ق، ق، ف، ق) = فہ  
کی کوئی یا نجویں مساوات ہوتی تو ہم ف، ق، ق، ق کو ساقط کر سکتے  
اور اس طرح ایسی مساوات معلوم کر سکتے جس سے فہ کی مختلف قیمتیں حاصل  
ہوتیں۔

(134) اس پانچویں مساوات کا ف، ق = فہ یا ق + ق = فہ ہونا مان لیا جا  
سکتا ہے جہاں ہر صورت میں فہ ایک کعبی مساوات سے معلوم ہو گا کیونکہ انہیں  
ہر تفاعل کی صرف تین قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ ان کو چار درجی کی اصلوں کی رقوم میں  
بیان کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ فرض کرنا کہ

$$فہ = \frac{ج}{۱} - ف = \frac{۱}{۲} (ق + ق - \frac{ج}{۲})$$

زیادہ سہولت بخش ہے۔ ف، ق، ق، ق کے یہ دو تفاعل مساواتوں (۱)  
میں سے دوسری مساوات کی رو سے مساوی ہیں۔ ان مساواتوں کی مدد سے  
ہم یہ آسانی سے معلوم کرتے ہیں کہ

$$ف + ق = ق + ف = \frac{۴۱بج - ۲۱د}{۳۱} + \frac{۸بف}{۱}$$

اور متماثل ربط

$$(ف + ف) (ق + ق) = (ف - ق) (ق - ق) + (ف + ق) (ق + ق)$$

کے ذریعہ ف، ق، ق، ق کو ساقط کرنے سے مساوات

$$۴۱د - ۲۱ج - ۸بف = ۰$$

برآورد ہوتی ہے جو وہی محول کعبی ہے جسے حل کے پچھلے طریقوں سے حاصل کیا گیا تھا۔  
اس طریقہ سے ف، ق، ق، ق کو معلوم کرنے کے بعد ہم مساواتوں  
(۱) کے ذریعہ چار درجی کو اجزائے ضربی میں تحلیل کر نیلے عمل کی تکمیل کر سکتے ہیں۔  
پانچویں مساوات کی شکل کے متغیلق جو مفروضہ ہم نے اوپر اختیار کیا  
ہے اس کی وجہ ظاہر ہے۔ فہ کی مفروضہ قیمتوں کا دفعہ ۳۶ مثال (۱) کی



مساواتوں کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ فہ وہی ہے جو طہ دفعہ مابقی میں تھا۔ اور اس لئے ہم یہ پیش بینی کرتے ہیں کہ ف، ق، ق کے استقاط سے فہ میں ایسی مساوات حاصل ہونی چاہئے جو حاصل کردہ محول کبھی کے مماثل ہو۔ عام طور پر اگر فہ سے ل، مہ، نہ کے فرقوں کا کوئی تفاعل تعبیر ہو جس کا لازمی نتیجہ یہ ہوگا کہ اس سے عہ، بہ، جہ، ضہ کے فرقوں کا ایک جفت تفاعل تعبیر ہوگا (دیکھو دفعہ ۲۷ مثال ۱۸) تو وہ مساوات جس کی اصلیں فہ کی مختلف قیمتیں ہوں ایسی ہوگی کہ اس کے سر، ا، ہ، ع، اور جے کے تفاعل ہونگے۔

اگر فہ حسب ذیل مثالوں میں سے دوسری مثال کے جملوں میں سے کسی ایک کے مساوی فرض کیا جائے تو فہ میں وہ مساوات جسکی اصلیں اس جملہ کی مختلف قیمتیں ہوں حسب شرح بالا ف، ف، ق، ق کے ساقط کرنے سے حاصل ہوگی۔

## مثالیں

(135)

$$۱۔ ی + ۶ھ + ی + ۲گ + ی + ۲ع - ۳ھ$$

کو دو درجہ اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔  
اس شکل کا حاصل ضرب

(ی + ۲ف + ی + ق) (ی + ۲ف - ی + ق)  
کے ساتھ مقابلہ کرو تو ف کے لئے حسب ذیل مساوات ملیگی:-

$$۲ف + ۱۲ھ + ۲ف + ۱۲ (۲ع - ۳ھ) = ۲ف - ۲گ = ۱۲$$

(دیکھو دفعہ ۶۱)

$$۱ف = ۲ف + ۵ = \frac{۱}{۴} (ق + ق - ۵۲)$$

اور



رکھنے سے یہ مساوات،  $\frac{1}{2}$  سے تقسیم کر نیکے بعد ہو جائیگی

۲۔ اگر ایک چار درجی جملہ کو دو دو درجی اجزائے ضربی

الآ + ف لا + ق ، لا + ف لا + ق

میں تحلیل کیا جائے تو ثبوت کرو کہ (۱) وہ ایک کبھی مساوات سے حاصل ہوتا ہے  
جبکہ وہ تمام ایسی ممکن قیمتیں اختیار کرے جو حسب ذیل نمونوں میں سے ہر ایک کے  
متناظر ہیں :-

ق + ق = ق - ق ، ق - ق = ق ، ق - ق = ق ، ق - ق = ق

(ف - ف) (ق - ق) (ق - ق) (ق - ق) (ق - ق)  
 اور (۲) فہ ایک چھ درجی مساوات سے حاصل ہوتا ہے جبکہ وہ تمام ایسی قیمتیں  
 اختیار کرے جو

ف، ق، ك، ف - ف، ق، ف - ف، ق، ف

کے متناظر ہیں۔  
ان تفاعلوں کو اصلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے ہر تفاعل کی ممکن قیمتوں کی تعداد معلوم ہوتی ہے۔

۶۵۔ چار درجہ کا متکافی شکل میں استحالہ۔ اس استحالہ کو عمل میں

لانیکی لئے ہم مساوات

۱۔ لا + م + ب لا + ج لا + م + لا + س = شکل ہو جاتی ہے  
میں لا = ک م + نر دج کرتے ہیں جس سے اس کی شکل ہو جاتی ہے

$$1 \text{ ک } 1 + 2 \text{ ک } 2 + 3 \text{ ک } 3 + \dots + n \text{ ک } n = \frac{n(n+1)}{2}$$

جہاں

ع<sub>۱</sub> = ا س + ی ع<sub>۲</sub> = ا س<sup>۲</sup> + ۲ ب س + ج ع<sub>۳</sub> = ا س<sup>۳</sup> + ۳ ب س<sup>۲</sup> + ۳ ج س + د و غیره



(دیکھو دفعہ ۳۵)۔ اگر یہ مساوات متکافی ہو تو ک اور س معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو مساواتیں ملتی ہیں یعنی

$$۱ک = ۲ع، ۳ک = ۱ع$$

ک کو ساقط کرنے سے ک کے لئے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے

$$۱ع - ۲ع = ۳ع$$

اور چونکہ

$$۱ک = ۲ع = ۳ک + ۳ب + ۳ج + ۳د$$

اس لئے س کی ہر قیمت کے جواب میں ک کی دو قیمتیں مساوی مگر مختلف ہوں گی۔

مساوات

$$۱ع - ۲ع = ۳ع$$

کو جب اندراجات (دفعات ۳۶، ۳۷)

$$۱ع = ۲ع + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

$$۱ع = ۲ع + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

کے ذریعہ تحویل کیا جائے تو وہ ہو جاتی ہے

$$۲گ + (۱ع - ۲ع) = ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰ = ۱$$

جو ایک کعبی مساوات ہے جس سے  $۱ = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$  کی تعیین ہوتی ہے اور اگر ہم رکھیں

$$\frac{۱}{۲} = ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

تو معیاری محول کعبی



$$۴ \text{ ر } ۳ \text{ ط} - ع \text{ ر } ۱ \text{ ط} + ج = ۰$$

سے طہ متعین ہو جاتا ہے۔  
اس استحالہ کو چار درجی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے اور  
یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ کعبی (۱) جو یہاں پیش ہوا ہے دفعہ ۶۲ کے کعبی  
سے صرف استقدر فرق رکھتا ہے کہ اس کی اصلیں اس کی اصلوں سے مختلف العلا  
ہیں۔

اب ہم ک اور سا کو چار درجی کی اصلوں عہ، یہ، جہ، ضہ کی  
رقوم میں بیان کریں گے۔ چونکہ ما کی مساوات جو لا = ک + ما + سا رکھنے سے  
حاصل ہوئی ہے متکافی ہے اسلئے اسکی اصلیں شکل ما، ما، ۱/ما، ۱/ما کی ہیں۔  
پس ہم لکھ سکتے ہیں

$$ع = ک + ما + سا، یہ = ک + ما + سا، جہ = ک + ۱/ما + سا$$

$$ضہ = ک + ۱/ما + سا$$

اور اس لئے

$$(ع - سا)(ما - سا) = (یہ - سا)(جہ - سا) = ک^۳$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{یہ - جہ - ع - ضہ}{یہ + جہ - ع - ضہ} = ص$$

$$ک^۲ = \frac{(جہ - ع)(یہ - ضہ)(ع - ضہ)}{(یہ + جہ - ع - ضہ)^۲}$$

اور

۱۔ چار درجی مساوات کو متکافی شکل میں تبدیل کر کے حل کرنیکا یہ طریقہ سٹرایس۔ ایس  
گریٹ ہیڈ (S. S. Great head) نے کیمرج ریٹھایمیٹیکل جرنل جلد اول میں  
بیان کیا ہے۔



ک اور س جو اس استحالہ میں داخل ہوتے ہیں انکی ایک اہم ہندسی تعبیر دیکھا جاسکتی ہے۔ ایک خط مستقیم پر ایک ثابت مبدا، و و اور فرض کرو کہ اس پر گئے چار نقطوں (ا، ب، ج، د) کے فاصلے و، و، و، و مساوات

$$1) \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = \text{س} = 0$$

کی اصلوں ع، ب، ج، ضہ سے متعین ہوئے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ دو درجہ مساواتوں کے حسب ذیل تین جوڑوں

$$(\text{ا} - \text{ب}) (\text{ب} - \text{ج}) = (\text{ا} - \text{ج}) (\text{ج} - \text{د})$$

$$(\text{ا} - \text{ج}) (\text{ج} - \text{د}) = (\text{ا} - \text{د}) (\text{د} - \text{ب})$$

$$(\text{ا} - \text{د}) (\text{د} - \text{ب}) = (\text{ا} - \text{ب}) (\text{ب} - \text{ج})$$

سے دربیچ کے جو تین نظام متعین ہوتے ہیں انکے مرکز و، و، و اور ان کے ماسکے ف، ف، اور ف، ف، اور ف، ف، ہیں۔ تب ہمیں مساواتیں ملنیگی

$$\text{و} \times \text{ب} = \text{و} \times \text{ج} = \text{و} \times \text{د} = \text{و} \times \text{ف}، \text{ وغیرہ}$$

جنگو مستحیل کر کے مساواتوں

(ب - س) (ج - س) = (ا - س) (د - س) = (ا - س) (ب - س) وغیرہ کے ساتھ مقابلہ کیا جائے تو یہ ثابت ہوتا ہے کہ س کی تین قیمتیں و، و، و ہیں یعنی ثابت مرکز سے دربیچ کے تین مرکزوں کے فاصلے نیز چونکہ و، ف، ف، اسلئے کہ کی چھ قیمتیں ہیں جو ہندسی طور پر فاصلوں

$$\text{و} \times \text{ف} = \text{و} \times \text{ف} = \text{و} \times \text{ف} = \text{و} \times \text{ف}$$

سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں و، ف، + و، ف، = 0، وغیرہ کیونکہ فاصلے مخالف سمتوں میں ناپے گئے ہیں۔

ہم صرف ہندسی نقطہ نگاہ سے دربیچ کے مرکزوں اور ماسکوں کو



عہ، بہ، جہ، ضہ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس طرح اُن نتیجوں کی مزید تصدیق جو ابھی ثابت ہوئے ہیں حسب ذیل طریقہ پر کرتے ہیں۔  
چونکہ نظام [ف ب ف ج] اور [ف ا ف د] موسیقی ہیں  
اسلئے

$$\frac{1}{ف ب} = \frac{1}{ف ب} + \frac{1}{ف ج} = \frac{1}{ف ا} + \frac{1}{ف د}$$

اور اگر ف یا ف کا فاصلہ ثابت مبداء سے لا ہو تو

$$\frac{1}{لا - ضہ} + \frac{1}{لا - عہ} = \frac{1}{لا - جہ} + \frac{1}{لا - بہ}$$

اس مساوات کو حل کرنے سے

$$\frac{لا - جہ - عہ - ضہ}{(جہ - ضہ)(عہ - بہ) + (بہ - ضہ)(جہ - عہ)} = \frac{لا - جہ - عہ - ضہ}{بہ + جہ - عہ - ضہ}$$

یا لا = کا ± ک

$$\frac{و ف ا + و ف ب}{2} = کا$$

$$ک = \frac{و ف ا - و ف ب}{2} = \pm و ف$$

مثال

کعبی

$$لا + ۳ ب لا + ۳ ج لا + د$$

کو متکافی شکل میں تحویل کرو۔

$$لا = ک ما + ص فرض کرنے سے مساوات$$



$$- گ = ع^۳ + ۳ ع^۲ + ۳ ع + ۳ =$$

حاصل ہوتی ہے جہاں  $ع = ۱ + ۱ + ۱ -$

ر کی قیمتیں یہ آسانی حاصل ہوتی ہیں

یہ جہ - ع<sup>۲</sup> ، جہ - ع<sup>۲</sup> ، ع<sup>۲</sup> - یہ - ع<sup>۲</sup>

یہ + جہ - ع<sup>۲</sup> ، جہ + ع<sup>۲</sup> - یہ - ع<sup>۲</sup> + یہ - ع<sup>۲</sup> -

اس صورت میں ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر محور پرتین نقطے 'آ' 'ب' 'ج' لئے جائیں اس طور پر کہ 'ب' اور 'ج' کے لحاظ سے 'آ' کا موسیقی مزدوج 'آ' ہو، 'ج' اور 'آ' کے لحاظ سے 'ب' کا 'ب'، 'آ' اور 'ب' کے لحاظ سے 'ج' کا 'ج' تو 'ر' اور 'ک' کی قیمتیں حسب ذیل ہونگی :-

$$ر = ۱ + ۱ + ۱ = ۳ ، ک = ۱ - ۱ - ۱ = -۱$$

ع<sup>۲</sup>، یہ، جہ کی رقوم میں 'و'، 'ب'، 'و' کی قیمتوں کے لئے دیکھو  
مثال ۱۳ صفحہ (۱۲۷) -

## ۶۶۔ اصولوں کے متشاکل تفاعلوں سے چار درجی کا حل - (139)

اس طریقہ سے چار درجی کے حل کو ایک کبھی کے حل میں تحویل کرنا اُس وقت ممکن ہے جب چار اصولوں ع<sup>۲</sup>، یہ، جہ، ضہ کے ایسے تفاعل بنانا ممکن ہو جو صرف تین قیمتیں قبول کریں اگر اصولوں کو باہم دگر ہر طرح ایک دوسری جگہ بدل دیا جائے۔ دفعہ ۶۴ مثال ۲ کے حوالہ سے یہ معلوم ہو گا کہ اس نوعیت کے مختلف تفاعل وجود رکھتے ہیں۔ یہ تفاعل دفعہ ۵۹ کے مثال تفاعلوں کی طرح یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ تین تین کے کوئی ایسے دو جٹ اس طور پر مربوط ہوتے ہیں کہ کسی جٹ کا کوئی ایک تفاعل دوسرے جٹ کے ایک تفاعل کے ساتھ سروں کی رقوم میں ایک منطق ہم رسم ربط رکھتا ہے۔ اس مسئلہ کو آئندہ ثابت کیا جائیگا۔

موجودہ حل کے مقاصد کو پیش نظر رکھ کر ہم وہ تفاعل استعمال کرتے ہیں



جن کا حوالہ دفعہ ۵۵ میں دیا گیا ہے کیونکہ ان سے بالراست چار درجی کی اصولوں کیلئے  
حلے سروں کی رقوم میں حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے اب ہم وہ مساوات بنائیں گے  
جسکی اصلیں

$$ت \equiv \frac{عہ + طہ بہ + طہ ا جہ + طہ ضہ}{۴}$$

کی تین قیمتیں ہوں جبکہ اصولوں کا ہر طرح ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کیا  
جائے اور طہ = ۱ -

یہ قیمتیں ہیں

$$ت_۱ \equiv \frac{بہ + جہ - عہ - ضہ}{۴}, ت_۲ \equiv \frac{جہ + عہ - بہ - ضہ}{۴}, ت_۳ \equiv \frac{عہ + بہ - جہ - ضہ}{۴}$$

اور چونکہ

$$(بہ + جہ - عہ - ضہ) \equiv ۳ = عہ + لہ - مہ - نہ$$

$$۳ (عہ - بہ) \equiv ۳ = عہ + لہ - مہ - نہ - ۲۸ \frac{۵}{۲۱}$$

اسلئے ت<sub>۱</sub>، ت<sub>۲</sub>، ت<sub>۳</sub> کی قیمتیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں

$$۲ - مہ - نہ = \frac{۵}{۲۱} - \frac{۲۸}{۱۲} - \frac{۵}{۲۱} - \frac{۲۸}{۱۲} - \frac{۵}{۲۱} - \frac{۲۸}{۱۲}$$

$$جس سے ت_۱ + ت_۲ + ت_۳ = ۳ - \frac{۵}{۲۱}$$

پھر چونکہ

$$۳ (۲ - مہ - نہ - لہ) = (۲ - نہ - لہ - مہ) ۳ = (لہ + مہ + نہ - نہ - نہ - نہ - لہ - مہ) ۳ = ۳ (۲ - مہ - نہ)$$

$$اور ۳ (۲ - مہ - نہ) = ۲۲ - \frac{۴}{۲۱}$$



اسلئے

$$ت^۳ + ت^۲ + ت + ۲ = ۳ - \frac{۲}{۹۶} - \frac{۱}{۹۶} = ۳ - \frac{۳}{۹۶} = ۳ - \frac{۱}{۳۲} = \frac{۹۵}{۳۲}$$

$$ت^۳ + ت^۲ + ت = \frac{۹۵}{۳۲} - ۲ = \frac{۹۵}{۳۲} - \frac{۶۴}{۳۲} = \frac{۳۱}{۳۲}$$

نیز

پس وہ مساوات جس کی اصلیں ت، ت، ت ہیں ہو جاتی ہے

$$(د^۳ + ۳(د^۲ + د + ۲) = \frac{۹۵}{۳۲} - \frac{۶۴}{۳۲} = \frac{۳۱}{۳۲}$$

یا گ کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳ سے درج کرنے سے

$$۴(د^۳ + د^۲ + د + ۲) = \frac{۹۵}{۳۲} - \frac{۶۴}{۳۲} = \frac{۳۱}{۳۲}$$

ہوتا ہے۔  
ع، ب، ج، د کو متعین کرنے کے لئے حسب ذیل مساواتیں ہیں

$$ع + ب + ج + د = ۳ - ض = ۳ - \frac{۱}{۳۲} = \frac{۹۵}{۳۲}$$

$$ع + ب + ج = ۳ - ض = ۳ - \frac{۱}{۳۲} = \frac{۹۵}{۳۲}$$

$$ع + ب + ج + د = ۳ - ض = ۳ - \frac{۱}{۳۲} = \frac{۹۵}{۳۲}$$

اور نیز

ان سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$ع = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - (ب + ج + د) = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - \frac{۹۵}{۳۲} = -\frac{۶۳}{۳۲}$$

$$ب = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - (ع + ج + د) = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - \frac{۹۵}{۳۲} = -\frac{۶۳}{۳۲}$$

$$ج = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - (ع + ب + د) = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - \frac{۹۵}{۳۲} = -\frac{۶۳}{۳۲}$$

$$ض = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - (ع + ب + ج) = ۳ - \frac{۱}{۳۲} - \frac{۹۵}{۳۲} = -\frac{۶۳}{۳۲}$$



(141)

نیز  $ا_۱ ا_۲ ا_۳$  کی متذکرہ بالا قیمتوں سے مساوات

$$ا_۱ ا_۲ ا_۳ = \frac{۱}{۲۱۲} گ$$

حاصل ہوتی ہے جس کے ذریعہ ایک جذر کو دوسرے دو جذروں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے اور پھر یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اصل کے لئے عام ضابطہ وہی ہے جو پہلے حاصل ہو چکا ہے۔

اس دفعہ کے مضمون کے سلسلہ میں چار درجی کی اصولوں کے ایسے دو تفاعلوں کا ذکر کر دینا سہولت بخش ہے جو ایسے خواص رکھتے ہیں جو دفعہ ۵۹ میں کعبی کی اصولوں کے متناظر تفاعلوں کے ثابت شدہ خواص کے مشابہ ہیں بحولہ بالا دفعہ کی ترجمہ کے مثال ترجمہ اختیار کرنے سے ان تفاعلوں کو لکھ کر نہ کی رقوم میں شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$ل = (بہ جب + عہ ضم) + سہ (جہ عہ + بہ ضم) + سہ (عہ بہ + جب ضم)$$

$$م = (بہ جب + عہ ضم) + سہ (جہ عہ + بہ ضم) + سہ (عہ بہ + جب ضم)$$

دفعہ ۶۳ مثال (۱) کی مساواتوں کے ذریعہ ان تفاعلوں کو محمول

کعبی کی اصولوں کی رقوم میں شکل

$$\frac{۱}{۲۱۲} ل = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

$$\frac{۱}{۲۱۲} م = طہ + سہ طہ + سہ طہ$$

میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز ان کو دفعہ ہذا کی اس مساوات کی مدد سے جوت اور طہ کو مربوط کرتی ہے  $ا_۱$ ،  $ا_۲$ ،  $ا_۳$  کی رقوم میں حسب طریقہ ذیل بیان کیا جاسکتا ہے

$$\frac{۱}{۲۱۲} ل = ا_۱ + سہ ا_۲ + سہ ا_۳$$

$$\frac{۱}{۲۱۲} م = ا_۱ + سہ ا_۲ + سہ ا_۳$$



یہ تفاعل ل اور م، چار درجی کے نظریہ میں اتنی ہی اہمیت رکھتے ہیں جتنی اہمیت دفعہ ۵۹ کے تفاعل کعبی کے نظریہ میں رکھتے ہیں۔ ان جملوں کے مکعب چار مقداروں کے سادہ ترین تفاعل ہیں جنکی صرف دو قیمتیں ہوتی ہیں جبکہ ان مقداروں کو ہر طرح آپس میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ وہ مندرجہ بالا محول کعبی کے محول دو درجی کی اصلیں ہیں اور چار درجی کے ہر بیان شدہ حل میں موجود رہتی ہیں۔

## مثالیں

(142)

۱۔ ثابت کرو کہ ل اور م، اصلوں ع، یہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے تفاعل ہیں۔

ع، یہ، جہ، ضہ کو بقدر ھ کے بڑھانے سے ل اور م غیر متغیر رہتے ہیں کیونکہ  $۱ + سہ + سہ = ۰$ ۔

۲۔ اصلوں ع، یہ، جہ، ضہ کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے سروں کی رقوم میں معلوم کرو۔

طہ، طہ، طہ کی رقوم ہیں ل اور م کی قیمتوں سے ہم یہ آسانی معلوم کرتے ہیں کہ

$$۱۳ طہ = ل + م، ل - م = (یہ - جہ)(عہ - ضہ)(سہ - سہ)$$

$$۱۲ طہ = سہ ل + سہ م، سہ ل - سہ م = (جہ - عہ)(یہ - ضہ)(سہ - سہ)$$

$$۱۲ طہ = سہ ل + سہ م، سہ ل - سہ م = (عہ - یہ)(جہ - ضہ)(سہ - سہ)$$

پھر ان مساواتوں سے طرفین کی رقوم کو باہم ضرب دیکر اور یہ یاد رکھ کر

طہ، طہ، طہ مساوات

$$۴ ل طہ = ۳ ع ل طہ + جے = ۰$$

کی اصلیں ہیں ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ

$$ل + م = ۴۳۲ - جے$$







نوٹ سوم)۔ اگرچہ عملی مقاصد کے لئے اصولوں کو جدا کر نیکی وہ طریقے قابل ترجیح ہیں جو آئندہ بیان کئے جائینگے تاہم اس باب کے مضامین کے سلسلہ میں چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات کا ذکر کر دینا کافی دلچسپی کا باعث ہوگا۔ چنانچہ ہم عام سے عام شکل میں چار درجی کے لئے یہ مساوات محسوب کریں گے۔ دفعہ ۶۱ مثال ۱ میں جو کچھ ثابت کیا گیا ہے اسکے مطابق یہ معلوم ہوگا کہ حاصل ہونیوالی مساوات کے سرسب کے سب 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

یہ مسئلہ فی الحقیقت اس کے مماثل ہے کہ حسب ذیل حاصل ضرب کو چار درجی کے سروں کی رقوم میں بیان کیا جائے:-

$$\{f - (b - a)(c - d)\} \{f - (b - a)(c - d)\} - (e - f)(g - h)$$

$$\times \{f - (b - a)(c - d)\} - (e - f)(g - h)$$

اس حاصل ضرب کو معلوم کرنا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ان چھ اجزاء ضربی میں سے دو دو کے جٹ بنائے جائیں اور ایسے تین حاصل ضربوں کو (جنکو ہم 'ا'، 'ب'، 'ج' سے تعبیر کریں گے) علیحدہ علیحدہ محول بعضی کی اصولوں کی رقوم میں بیان کیا جائے اور آخر میں حاصل ضرب 'ا'، 'ب'، 'ج' کو 'د'، 'ع'، 'ج' کی رقوم میں بیان کیا جائے۔

$$a \equiv f - (b - a)(c - d) + (e - f)(g - h)$$

اور دفعہ ۶۱ کے نتیجوں کی مدد سے ہم (ب - ا) (ج - د) کے لئے یہ آسانی حسب ذیل حملے اخذ کرتے ہیں:-

$$a^2 (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) (a^2 - b^2 - c^2 - d^2)$$

پس بغیر کسی مشکل کے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a \equiv f + (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) - \frac{e}{f} - \frac{g}{h}$$



### اختصار کی خاطر ترقیم

$$۱۶ \equiv ۱۵ \text{ 'ف' } ۴ \equiv ۴ \text{ 'ق' } ۱۶ \text{ جے } ۱۶ \text{ 'د' } ۳ \text{ 'ر'}$$

$$۴ + ۲ \text{ 'ف' } ۴ + ۲ \text{ 'ق' } \equiv ۴$$

کو داخل کیا جائے تو  $\pi$  ہو جاتا ہے  $۴ + ۸ \text{ طہ } ۴ - ۲۸ \text{ طہ } ۳$   
حاصل ضرب  $\pi, \pi, \pi$  کو مثال ۱۸ صفحہ (۱۲۸) سے تحویل کیا جائے تو

$$۳ + ۳ \text{ 'ق' } ۲ - (۲ \text{ 'ق' } ۴ + ۱۸ \text{ 'ر' } ۴) - (۸ \text{ 'ر' } ۴ + ۱۲ \text{ 'ق' } ۲)$$

$$+ ۳۶ \text{ 'ق' } ۲ \text{ 'ر' } ۴ + ۲۴ \text{ 'ر' } ۴ = ۰$$

آخر الامر یہ کی قیمت درج کرنے سے ہمیں 'خ' 'ق' 'ر' کی رقوم میں مربع  
فروقیں کی مساوات ملے گی

$$۴ + ۳ \text{ 'ف' } ۴ + ۵ \text{ 'ف' } ۳ + (۲ \text{ 'ق' } ۲ + ۱۸ \text{ 'ر' } ۴) + (۸ \text{ 'ر' } ۴ + ۱۲ \text{ 'ق' } ۲) - ۲۸ \text{ 'طہ' } ۴$$

$$+ (۶ \text{ 'ف' } ۲ - ۴ \text{ 'ق' } ۲ - ۱۸ \text{ 'ر' } ۴) + ۹ \text{ 'ق' } ۲ (۶ \text{ 'ف' } ۲ - ۴ \text{ 'ق' } ۲) - ۲۸ \text{ 'طہ' } ۴$$

$$+ ۲ \text{ 'ق' } ۲ - ۲۴ \text{ 'ر' } ۴ = ۰$$

(144)

۱ 'د' ۳ 'ر' ۴ جے کی رقوم میں یہ مساوات حسب ذیل ہوگی

$$۴ + ۲۸ \text{ 'د' } ۳ + ۴ \text{ 'ف' } ۴ + ۸ \text{ 'د' } ۳ + ۹۶ \text{ 'د' } ۳ + ۴ \text{ 'ق' } ۲ + ۳۲ \text{ 'د' } ۳ + ۱۲۸ \text{ 'د' } ۳$$

$$+ ۱۶ \text{ 'د' } ۳ + ۱۳ \text{ 'د' } ۳ - ۴ \text{ 'د' } ۳ + ۱۶ \text{ 'د' } ۳ + ۳۸۴ \text{ 'د' } ۳ - ۴ \text{ 'د' } ۳ - ۲۸۸ \text{ 'د' } ۳ + ۴ \text{ 'د' } ۳$$

$$+ ۱۱۵۲ \text{ 'د' } ۳ - ۴ \text{ 'د' } ۳ + ۳ \text{ 'د' } ۳ + ۲۵۶ \text{ 'د' } ۳ - ۴ \text{ 'د' } ۳ + ۲۴ \text{ 'د' } ۳ = ۰$$

یہ قابل توجہ ہے کہ  $\pi$  کے لئے جو قیمت اوپر حاصل کی گئی ہے اسکو مساوات

$$\text{طہ } ۳ = \text{طہ } ۲ - \frac{۱}{۴} \text{ کی مدد سے طہ کے دو درجی تفاعل کے طور پر بیان}$$

کیا جاسکتا ہے اور اس کے بعد کا عمل حساب اس دو درجی اور محول کعبی کے

۱۵ مربع دار فروقیں کی مساوات کو اس شکل میں پہلے سٹرایم۔ رابرٹس نے

Nouvelles Annales de Mathematiques کی سولہویں جلد میں دیا تھا۔



درمیان طم کو ساقط کرنے سے جاری رکھا جاسکتا ہے۔

۶۸۔ چار درجی کی اصلوں کی نوعیت کی جانچ۔ اس تحقیقات کو جاری

کرنے سے پیشتر دفعہ ۴۳ میں جو بیان کیا گیا ہے اسکا دہرانا ضروری ہے اور وہ یہ کہ جب کسی جبری مساوات کی اصلوں کی نوعیت کے لحاظ سے کوئی شرط سروں کے ایک تفاعل کی علامت سے تعبیر ہو تو ان سروں کا حقیقی عددی مقداروں کو تعبیر کرنا فرض کر لیا جاتا ہے۔ مزید یہ کہ یہ بھی تسلیم کر لیا جاتا ہے کہ سب سے بڑے درجہ کی رقم کا سر معدوم نہیں ہوتا جیسا کہ مذکورہ بالا دفعہ میں کیا گیا تھا۔ حسب سابق فرض کرو کہ ۵ سے سروں کا وہ تفاعل تعبیر ہوتا ہے (اس کو ہم میٹر کہیں گے) جسکو ایک مثبت عددی جزو ضربی سے ضرب دیا جائے تو وہ اصلوں کے فرقوں کے مربعوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ اب دفعات گذشتہ کے ثابت شدہ مسئلوں سے مساوات ملتی ہے

$$(۱) (ب-ج) (ج-ع) (ع-ی) (ی-ا) (ا-ب) (ب-ج) (ج-ع) (ع-ی) (ی-ا) (ا-ب) = ۵۲۵۶$$

جہاں  $۵ = ۲۴ - ۲۹$ ۔  
ذیل میں اصلوں کی نوعیت کی بحث کو سہولت کے مد نظر تین حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یعنی (۱) جب ۵ معدوم ہو یا (۲) جب وہ منفی ہو یا (۳) جب وہ مثبت ہو۔

(۱) جب ۵ معدوم ہو تو مساوات میں مساوی اصلیں ہوتی ہیں۔  
یہ امر ۵ کی مندرجہ بالا قیمت سے ظاہر ہے۔ اب چار مختلف صورتیں برآمد ہوتی ہیں۔ (ع) جب صرف دو اصلیں مساوی ہوں۔ اس صورت میں ع اور جے علیحدہ علیحدہ معدوم نہیں ہوتے۔ (ب) جب تین اصلیں مساوی ہوں اس صورت میں علیحدہ علیحدہ ع = جے = اور جے = (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۶۱)۔ (ج) جب اصلوں کے دو مختلف زوج مساوی ہوں۔



(145) - اس صورت میں شرطیں ہونگی گ۔ = ا' ع - ۱۲ھ۔ = (دفعہ ۶۱ مثال ۳)۔  
دفعہ ۳ کی مثال کے ذریعہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ شرطیں  
مساوات ۵ = کو مستلزم ہیں۔ پس یہ دو مساواتیں 'مساوات ۵ =  
کے ساتھ ملکر صرف دو شرطوں کے حامل ہیں۔ (ضہ) جب سب اصلیں مساوی

ہوں۔ اس صورت میں دفعہ ۶۱ سے تین شرطیں ھ۔ = ع۔ = اور جے۔ =  
اخذ کیا جاسکتی ہیں۔ ان کو ایک ایسی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جو دفعہ ۴۳ کی  
صورت (۴) کی شرطوں کے لئے حاصل کردہ شکل کے مشابہ ہو۔

(۲) جب '۵ منفی ہو تو مساوات کی دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں

خیالی ہوتی ہیں۔ اصلوں کی رقوم میں ۵ کی قیمت سے اسکو اخذ کیا جاسکتا ہے  
کیونکہ جب سب اصلیں حقیقی ہوں تو ۵ صریحاً مثبت ہے اور جب '۵ نہ ہو  
جہ '۵ کی بجائے مناسب خیالی جملے یعنی ۵ ± ک ۱-۲ ۵ ± ک ۱-۲  
درج کئے جاتے ہیں تو فوراً یہ معلوم ہوتا ہے کہ ۵ مثبت ہے اسوقت بھی جبکہ  
سب اصلیں خیالی ہوں۔

(۳) جب '۵ مثبت ہو تو یا تو سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب

اصلیں خیالی۔ اسکو بھی ۵ کی قیمت سے حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ '۵ نہ  
کی بجائے ۵ ± ک ۱-۲ درج کرنے سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ ۵ منفی ہے  
جبکہ دو اصلیں حقیقی اور دو اصلیں خیالی ہوں۔ اس لئے اس صورت میں  
یعنی جب '۵ مثبت ہو سروں کا صرف یہ تفاعل ہی اصلوں کی نوعیت  
کو پوری طرح متعین کرنے میں کافی نہیں ہے کیونکہ پھر بھی یہ امر مشتبہ رہ جاتا  
ہے کہ آیا سب اصلیں حقیقی ہیں یا سب خیالی۔ فرید شرطیں جو ان دو صورتوں  
میں تمیز پیدا کرنے کے لئے ضروری ہیں بولر کے کعبی (دفعہ ۶۱) سے اس طرح  
حاصل کیا جاسکتی ہیں:- سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے یہ ضروری







۵۔ وہ شرط معلوم کرو کہ کبھی

$$۱ لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰$$

کو شکل

$$ل (لا - عہ) + م (لا - بہ) + ن (لا - جہ)$$

میں لکھا جاسکے جہاں عہ، بہ، جہ، کبھی مساوات

$$۱ لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰$$

کی اصلیں ہیں۔  
شکلوں کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$۱ = ل + م + ن$$

$$- ب = ل + عہ + م + بہ + ن + جہ$$

$$ج = ل + عہ + م + بہ + ن + جہ$$

$$- د = ل + عہ + م + بہ + ن + جہ$$

$$نیز ۱ لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰، وغیرہ$$

اسلئے ان مساواتوں کو علی الترتیب د، ۳ ج، ۳ ب، ۱ سے ضرب دو اور جمع کرو  
تو مطلوبہ شرط حاصل ہوگی

$$(۱ د - ۱ لا) - ۳ (ب ج - ب لا) = ۰$$

۶۔ اگر عہ، بہ، جہ، کبھی مساوات

$$۱ لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰$$

کی اصلیں ہوں تو مساوات

$$۱ لا^۳ + ۳ ب لا^۲ + ۳ ج لا + د = ۰$$

کو ناطق بناؤ اور نتیجہ کو ۱، ۲، ۳ کی رقوم میں بیان کرو۔



(147)

جواب :-  $۱۲۵ = ۱۶ + ۵۳۶۰ + ۲۸ + ۶ - ۵۴۸ =$   
۷۔ اگر دو درجی مساواتوں

$$۱۶ + ۲ + ۱۶ = ۰ \quad ۱۶ + ۲ + ۱۶ = ۰$$

کی اصلیں  $۱۶$  اور  $۲$  ہوں تو وہ مساوات معلوم کرو جسکی اصلیں  
۱۶ اور  $۲$  کی چار قیمتیں ہوں۔

$$\text{فرض کرو } ۱۶ = ۱۶ - ۱۶ = ۰ \quad ۱۶ = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

جواب :-  $(۱۶ - ۱۶) + ۲ + ۱۶ = ۰$ ۔  $۱۶ - ۱۶ = ۰$ ۔

نوٹ :- یہ اور نیچے کی دو مثالیں قہ کو ان جذروں میں بیان کرنے سے جنہیں مساواتوں  
کے سر شامل ہوں حل ہو سکتی ہیں۔

۸۔ مثال، کی ترقیم استعمال کر کے وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں  $۱۶ + ۲$  کی

چار قیمتیں ہوں۔

$$\text{فرض کرو } ۱۶ = ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ = ۰ \quad ۱۶ = ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ = ۰$$

جواب :-  $[۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶] = ۰$ ۔  $۱۶ = ۱۶$ ۔

اس مثال میں حاصل ہو نیوالا چار درجی ایسا ہے کہ گ۔

۹۔ اسی صورت میں اگر  $۱۶ = ۱۶ - ۱۶$  (عم - عم) تو وہ مساوات بناؤ جسکی  
اصلیں  $۱۶$  کی مختلف قیمتیں ہوں۔

$$\text{فرض کرو } ۱۶ = ۱۶ - ۱۶ = ۰ \quad ۱۶ = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

جواب :-  $[۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶ + ۱۶] = ۰$ ۔  $۱۶ = ۱۶$ ۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی میں ایک دوہری اصل ہو تو اس کے بھی ہیں جسکی  
اصلیں  $۱۶$  کی قیمتیں ہیں (دفعہ ۶۵) وہی دوہری اصل ہوگی۔ نیز معلوم کرو کہ چار درجی



تین اصلیں مساوی ہوں تو یہ کبھی کیا ہو جاتا ہے۔

۱۱۔ اگر  $h$  اور  $j$  دونوں مثبت ہوں تو بلا واسطہ (یولر کے کبھی کی امداد کے بغیر) ثابت کرو کہ چار درجہ کی سب اصلیں خیالی ہیں۔  
 اصلوں کی رقوم میں  $h$  کے لئے جو جملہ ہے (مثال ۱۹ صفحہ ۷۲) اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب  $h$  مثبت ہو تو خیالی اصلوں کا کم از کم ایک زوج  $h \pm k$  ہونا چاہئے۔ اب سب اصلوں کو بقدر  $h$  کے گھٹانے سے اور انکو  $k$  سے تقسیم کرنے سے (کیونکہ ان استحالوں سے اصلوں کے دوسرے زوج  $h$  ضد کی نوعیت پر کوئی اثر نہیں پڑیگا اور نہ  $h$  اور  $j$  کی علامتوں پر) چار درجہ کو شکل ذیل میں رکھا جاسکتا ہے:-

$$(1 + a^2)(f + la + q)$$

$$یا \quad 1 + a^2 f + la + j = 1 + a^2 f + la + q \quad \text{جہاں } j = q + 1$$

$$جس سے \quad h = j - f^2, \quad e = q - f^2, \quad 3j + f^2 = 3j + f^2$$

$$جے = q + j + 2f^2 - f^2(1 + q) - j = (q - f^2) - j$$

اور اسلئے

$$q - f^2 = j + \frac{j}{f} = \frac{j}{f} + (h + f^2) + \frac{j}{f} + h$$

$$یا \quad - \left( \frac{j}{f} - h \right) = (h + f^2) + \frac{j}{f} + h$$

جس سے یہ ثابت ہے کہ  $h$  اور  $h$  ضد خیالی ہیں جب  $h$  اور  $j$  مثبت ہوں۔  
 (دیکھو دفعہ ۶۱ مثال ۸)

(148)

۱۲۔ اگر چار درجہ کی مساوی اصلوں کے دو مختلف زوج ہوں تو بلا واسطہ ثابت کرو کہ

$$12h^2 = 8h^3, \quad 12h^2 = 8h^3$$

اس صورت میں چار درجہ کو  $12$  سے تقسیم کیا جائے تو وہ شکل ذیل اختیار کرتا ہے



$$(لا - عه) (لا - به) \equiv (لا - عه + به) - (لا - عه - به) = (لا - عه + به) - (لا - عه - به)$$

$$ی = لا + لا + اور ک = عه - به$$

جہاں  
اب شکلوں

$$ی - ک = ی + ک ، ی + ۶ = ی + ۴ گ + ی + ۳ ع - ۳ ه$$

اور  
کا مقابلہ کرو تو

۳ ه = ک - ۲ گ ، ۳ ع - ۳ ه = ک - ۲ گ  
جن سے اوپر کے ربط فوراً حاصل ہو جاتے ہیں۔ طالب علم آسانی کے ساتھ ثابت کر سکتا ہے کہ یہ ربط دفعہ ۶ مثال ۳ کے ربطوں کے مماثل ہیں۔ نیز اس بات کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اس صورت میں چار درجہ کے حل میں صرف ایک جذر المربع شامل ہوتا ہے (جو دو درجہ (لا - عه) (لا - به) کے حل سے حاصل ہوتا ہے)۔

۱۳۔ وہ شرط معلوم کرو کہ چار درجہ کی شکل

$$ل (لا + ۲ ف لا + ق) + م (لا + ۲ ف لا + ق) + ن$$

میں رکھا جاسکے۔

اس صورت میں دوسرے اور چوتھے سروں کو ایک ساتھ ایک ہی استعمال سے خارج کیا جاسکتا ہے اور عام حل میں صرف دو جذر المربع شامل ہوتے ہیں۔  
جواب :- گ = ۰

۱۴۔ ثابت کرو کہ چار درجہ

$$م (لا - ن) - ن (لا - م)$$

کے لئے جے معدوم ہوتا ہے۔

۱۵۔ اگر چار درجہ کی اصلیں عه ، به ، جہ ، ضہ ایک خط مستقیم پر کے مبداء سے چار نقطوں کے فاصلوں کو تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ جب یہ نقطے خط پر ایک



موسیقی تقسیم بناتے ہیں تو یوں کہ کبھی کی اصلیں سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں اور دفعہ ۶۲ کے کبھی کی اصلیں سلسلہ موسیقیہ میں۔

۱۶۔ مساوات

$$۱ \text{ لا} + ۱۲ \text{ لا} + ۱۶ \text{ لا} + ۲۱ \text{ لا} + ۲۴ \text{ لا} = ۰$$

سے جو چار نقطے ایک خط مستقیم پر حاصل ہوتے ہیں مبداء سے ان کے فاصلوں سے چھ غیر موسیقی تفاعل بنتے ہیں۔ وہ مساوات بناؤ جسکی اصلیں یہ چھ تفاعل ہوں۔ وہ چھ غیر موسیقی نسبتیں یہ ہیں:-

$$\frac{۱}{۱۲}، \frac{۱}{۱۶}، \frac{۱}{۲۱}، \frac{۱}{۲۴}$$

(149)

جہاں

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۱۲} &= \frac{(۱۲-۱)}{(۱۲-۱)} = \frac{(۱۱-۱)}{(۱۱-۱)} = \frac{(۱۰-۱)}{(۱۰-۱)} = \frac{(۹-۱)}{(۹-۱)} = \frac{(۸-۱)}{(۸-۱)} = \frac{(۷-۱)}{(۷-۱)} = \frac{(۶-۱)}{(۶-۱)} = \frac{(۵-۱)}{(۵-۱)} = \frac{(۴-۱)}{(۴-۱)} = \frac{(۳-۱)}{(۳-۱)} = \frac{(۲-۱)}{(۲-۱)} = \frac{(۱-۱)}{(۱-۱)} \\ \frac{۱}{۱۶} &= \frac{(۱۶-۱)}{(۱۶-۱)} = \frac{(۱۵-۱)}{(۱۵-۱)} = \frac{(۱۴-۱)}{(۱۴-۱)} = \frac{(۱۳-۱)}{(۱۳-۱)} = \frac{(۱۲-۱)}{(۱۲-۱)} = \frac{(۱۱-۱)}{(۱۱-۱)} = \frac{(۱۰-۱)}{(۱۰-۱)} = \frac{(۹-۱)}{(۹-۱)} = \frac{(۸-۱)}{(۸-۱)} = \frac{(۷-۱)}{(۷-۱)} = \frac{(۶-۱)}{(۶-۱)} = \frac{(۵-۱)}{(۵-۱)} = \frac{(۴-۱)}{(۴-۱)} = \frac{(۳-۱)}{(۳-۱)} = \frac{(۲-۱)}{(۲-۱)} = \frac{(۱-۱)}{(۱-۱)} \\ \frac{۱}{۲۱} &= \frac{(۲۱-۱)}{(۲۱-۱)} = \frac{(۲۰-۱)}{(۲۰-۱)} = \frac{(۱۹-۱)}{(۱۹-۱)} = \frac{(۱۸-۱)}{(۱۸-۱)} = \frac{(۱۷-۱)}{(۱۷-۱)} = \frac{(۱۶-۱)}{(۱۶-۱)} = \frac{(۱۵-۱)}{(۱۵-۱)} = \frac{(۱۴-۱)}{(۱۴-۱)} = \frac{(۱۳-۱)}{(۱۳-۱)} = \frac{(۱۲-۱)}{(۱۲-۱)} = \frac{(۱۱-۱)}{(۱۱-۱)} = \frac{(۱۰-۱)}{(۱۰-۱)} = \frac{(۹-۱)}{(۹-۱)} = \frac{(۸-۱)}{(۸-۱)} = \frac{(۷-۱)}{(۷-۱)} = \frac{(۶-۱)}{(۶-۱)} = \frac{(۵-۱)}{(۵-۱)} = \frac{(۴-۱)}{(۴-۱)} = \frac{(۳-۱)}{(۳-۱)} = \frac{(۲-۱)}{(۲-۱)} = \frac{(۱-۱)}{(۱-۱)} \\ \frac{۱}{۲۴} &= \frac{(۲۴-۱)}{(۲۴-۱)} = \frac{(۲۳-۱)}{(۲۳-۱)} = \frac{(۲۲-۱)}{(۲۲-۱)} = \frac{(۲۱-۱)}{(۲۱-۱)} = \frac{(۲۰-۱)}{(۲۰-۱)} = \frac{(۱۹-۱)}{(۱۹-۱)} = \frac{(۱۸-۱)}{(۱۸-۱)} = \frac{(۱۷-۱)}{(۱۷-۱)} = \frac{(۱۶-۱)}{(۱۶-۱)} = \frac{(۱۵-۱)}{(۱۵-۱)} = \frac{(۱۴-۱)}{(۱۴-۱)} = \frac{(۱۳-۱)}{(۱۳-۱)} = \frac{(۱۲-۱)}{(۱۲-۱)} = \frac{(۱۱-۱)}{(۱۱-۱)} = \frac{(۱۰-۱)}{(۱۰-۱)} = \frac{(۹-۱)}{(۹-۱)} = \frac{(۸-۱)}{(۸-۱)} = \frac{(۷-۱)}{(۷-۱)} = \frac{(۶-۱)}{(۶-۱)} = \frac{(۵-۱)}{(۵-۱)} = \frac{(۴-۱)}{(۴-۱)} = \frac{(۳-۱)}{(۳-۱)} = \frac{(۲-۱)}{(۲-۱)} = \frac{(۱-۱)}{(۱-۱)} \end{aligned}$$

نیز وہ مساوات جسکی اصلیں

$$(۱-۱) (۲-۱) (۳-۱) (۴-۱) (۵-۱) (۶-۱) (۷-۱) (۸-۱) (۹-۱) (۱۰-۱) (۱۱-۱) (۱۲-۱) (۱۳-۱) (۱۴-۱) (۱۵-۱) (۱۶-۱) (۱۷-۱) (۱۸-۱) (۱۹-۱) (۲۰-۱) (۲۱-۱) (۲۲-۱) (۲۳-۱) (۲۴-۱)$$

ہیں کبھیوں

$$۱۲ \text{ لا} + ۱۶ \text{ لا} + ۲۱ \text{ لا} + ۲۴ \text{ لا} = ۰$$

میں سے ایک ہے۔

وہ مساوات جسکی اصلیں انہیں سے کسی کبھی کی اصلوں کی نسبتیں یہ تبدیل علامت ہوں یہ ہوگی

$$۱۲ \text{ لا} + ۱۶ \text{ لا} + ۲۱ \text{ لا} + ۲۴ \text{ لا} = ۰ \text{ (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۱۲۸)}$$

$$۱۲ \text{ لا} + ۱۶ \text{ لا} + ۲۱ \text{ لا} + ۲۴ \text{ لا} = ۰ \text{ جہاں}$$



فہ میں اس مساوات کی اصلیں مندرجہ بالا چھ غیر موسیقی نسبتیں ہیں۔  
اس مساوات کو زیادہ واضح شکل میں لکھا جاسکتا ہے جیسا کہ ذیل کے مسئلوں سے ظاہر ہوگا۔

(۱) یہ چھ غیر موسیقی نسبتیں ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں اس طرح بیان ہو سکتی ہیں

$$\text{فہ} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}}$$

مساوات متماثلہ

(بہ - جہ) (عہ - ضہ) + (جہ - عہ) (بہ - ضہ) + (جہ - ضہ) (بہ - عہ) = ۰  
سے حسب ذیل روابط ملتے ہیں

$$\text{فہ} + \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}} = \frac{1}{\text{فہ}} + \frac{1}{\text{فہ}}$$

اور ان سے تمام غیر موسیقی نسبتوں کو ان میں سے کسی ایک کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(ب) اگر غیر موسیقی نسبتوں میں سے دو نسبتیں میساوی ہو جائیں تو فہ کی چھ قیمتیں - سہ اور - سہ ہونگی جن میں سے ہر ایک تین مرتبہ تکرار پائے گی اور اس صورت میں ع = ۰۔

کیونکہ فرض کرو  $\text{فہ} = \text{فہ}$  تو مندرجہ بالا رابطوں میں سے دوسرے سے

$$\text{فہ} - \text{فہ} = ۰ = ۱ + \text{فہ}$$

$$\text{فہ} = -۱ = -۱ - \text{فہ}$$

جس سے اور ان قیمتوں کو فہ کی بجائے (۱) میں درج کیا جائے تو تمام غیر موسیقی نسبتیں معلوم ہوتی ہیں۔  
نیز چونکہ

$$\frac{\text{لہ} - \text{مہ}}{\text{لہ} - \text{نہ}} + \frac{\text{مہ} - \text{نہ}}{\text{لہ} - \text{نہ}} = \frac{\text{لہ} - \text{نہ}}{\text{لہ} - \text{نہ}} = ۱$$



$$= \sum_i 1 + \sum_{i,j} 1 - \sum_{i,j} 1 = 2$$

(ج) جب انہیں سے ایک نسبت موسیقی ہو تو وہ کی چھ قیمتیں - ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶  
ہیں جنہیں سے ہر ایک دو مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ اور اس صورت میں ہے --

ف = ا تو  $\frac{ل - م}{ل - ن}$  = ا یعنی ۲ ل - م - ن = ۰

جو جے کا ایک جزو ضربی ہے (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۷۱) -

(و) یہ نتیجے اور ان کے عکس اُس چھ درجی مساوات کو جو فہ میں ہے شکل ذیل میں لکھنے سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔ (دیکھو مثال ۱۲ صفحہ ۱۷۴) :-

$$x^3 \{ (f+1)(f+2)(f-\frac{1}{p}) \} = 24 \{ (f+1)(f+2)(f+3) \}$$

۱۷- ثابت کرو کہ مساوات

$$\frac{(1-u)u}{(1-\sqrt{u})\sqrt{u}} = \left( \frac{1+u+\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}+\sqrt{u}} \right)$$

کے حل حسب ذیل ہیں :-

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷، ۵۳۸، ۵۳۹

۱۸۔ (ع۔ یہ) (ج۔ ضہ) کو طہ، طہ، طہ کے ایک منطق تفاعل کے  
طور پر بیان کرو اور پھر اسکو چار درجہ کی سرول کی رقوم میں لکھو۔

جواب :-  $- 3128 (P_1 - P_2)^2 \left( \frac{P_2}{P_1} + P_1 \right) = \frac{94}{P_1} (52) \text{ ع}$

$$(+ 1.2)$$

۱۹ -  $(\text{ب}^۱ - \text{ج}^۱)(\text{ع}^۱ - \text{ض}^۱) + (\text{ج}^۲ - \text{ع}^۲)(\text{ب}^۲ - \text{ض}^۲)$

+ (عہ - ب) (جہ - ضہ) کو طہ، طہ، طہ کے منطق تفاعل کے طور پر بیان کرو۔



یہ متشاکل تفاعل جملہ

$$^2(مہ - نہ) + ^2(لہ - مہ) + ^2(مہ - نہ)$$

$$= ۲۵۶ \pm (طہ - طہ) (طہ - طہ) (طہ - طہ)$$

کے معادل ہے۔

۲۰۔ وہ مساوات بتاؤ جس کی اصلیں چار درجہ کی اصلوں میں سے دو درجہ کی حاصل ضرب ہوں۔

مطلوبہ مساوات جملہ

$$(فہ - بہ جہ) (فہ - عہ ضہ) = فہ^۲ - لہ فہ + \frac{س}{۱} = فہ^۲ - ۲ \frac{ج}{۱} فہ + \frac{س}{۱} - ۴ طہ$$

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔

جواب :- (۱ فہ - ۲ ج + س) (۲ فہ - ۲ ج + س) = ۴ فہ - ۲ ج + س

$$+ (س + ۱۶ ج - ۴) = ۰$$

۲۱۔ وہ مساوات بتاؤ جس کی اصلیں ۴ + بہ + عہ کی مختلف قیمتیں ہوں جہاں

عہ، بہ، جہ، ضہ چار درجہ کی اصلیں ہیں۔

مطلوبہ مساوات جملہ

$$(فہ - بہ + جہ) (فہ - عہ + ضہ) = فہ^۲ + ۲ \frac{ب}{۱} فہ + \frac{س}{۲} + فہ + \frac{ب}{۱} فہ + \frac{س}{۲}$$

$$= فہ^۲ + ۲ \frac{ب}{۱} فہ + \frac{س}{۱} - طہ$$

کے نمونہ کے تین اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔

جواب :- ۴ (۱ فہ + ۲ ب + ج + س)

$$- ۴ (۱ فہ + ۲ ب + ج + س) = ۰$$

۲۲۔ ثابت کرو



$$3 \frac{1}{(ع - یہ)} = \frac{ع ۹}{۲} \left( \frac{۱۳ جے - ۵۲ ع}{۲ جے - ۲۷ ع} \right)$$

طہ، طہ، طہ کی رقوم میں ع، یہ، جہ، ضہ کے لئے جو جملے ہیں ان سے حاصل ہوتا ہے

$$3 \frac{1}{(ع - یہ)} = \frac{1}{۲} \left\{ \frac{طہ + ۱}{طہ - ۱} + \frac{طہ + ۲}{طہ - ۲} + \frac{طہ + ۳}{طہ - ۳} \right\}$$

جبکہ ۱، ۲، ۳ جے کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۲۳ - ثابت کرو

$$3 \frac{طہ}{(طہ - ۲)} = ۰$$

جبکہ ع = ۰ اور م، ۳ یا ۳ پ + ۱ کی شکل کا ہو جہاں پ ایک مثبت صحیح

عدو ہے۔

۲۴ - ثابت کرو کہ

$$6 \equiv ۱لا + ۲ج + ۳س + ۴ی + ۵د + ۶ما + ۷ب + ۸لا$$

کو دو مربعوں کے فرق یا مجموعے کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے اگر

$$جے = ۱ج + ۲س + ۳ب + ۴ج + ۵د + ۶س + ۷ب + ۸ج = ۳$$

$$۱ع \equiv (۱لا + ۲ب + ۳ج + ۴ی) + (۵د - ۶ج - ۷ب) + ۸ما$$

$$+ ۲(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۳(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۴(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۵(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۶(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۷(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۸(۵د - ۶ج - ۷ب)$$

اور (۱ج - ۲ب) + ۲(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۳(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۴(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۵(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۶(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۷(۵د - ۶ج - ۷ب) + ۸(۵د - ۶ج - ۷ب) کا مل مربع ہے اگر

$$(۱ج - ۲ب) + (۵د - ۶ج - ۷ب) = (۵د - ۶ج - ۷ب)$$

یا جے = ۰

۲۵ - اگر مسادات



۱. لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰  
 کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں تو سروں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ وغیرہ کی رقوم میں مساوات  
 $\sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} = ۰$

کو حل کرو۔

اگر  $\sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} + \sqrt{لا - لا} = ۰$   
 کو ناطق بتایا جائے اور عہ، بہ، جہ، ضہ کی بجائے سروں کو درج کیا جائے تو

$$(۳ \text{ لا} - ۲ \text{ لا}) = ۱ \text{ لا}$$

اب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کی بجائے عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ، عہ سے  
 اور تحویل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۱ + لا = \frac{۱}{۳} (۳ - ۲)$$

۲۶ — چار درجہ کی قوتوں کی مساوات اور تین مجموعوں کی مساوات معلوم کرو  
 (مثال ۲۱ صفحہ ۲۲۲) اور چار درجہ کو صرف ایک استعمال کے ذریعہ حل کرو۔  
 لا کی بجائے لا + لا درج کرنے اور دفعہ ۶۵ کی ترتیب استعمال کرنے سے

(152)

$$۱ لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

لا اور لا کے لئے ایسی قیمتیں فرض کی جاسکتی ہیں کہ وہ دو مساواتوں

$$۱ لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا + لا = ۰$$

کو پورا کریں جن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ لا کی کسی قیمت کے جواب میں لا کی دو مساوی  
 اور مختلف علامت قیمتیں ہیں اور جب لا کو اس وقت کیا جاتا ہے تو لا کے لئے  
 ہمیں چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے۔ لا اور لا کی قیمتوں کو اصلوں عہ، بہ، جہ، ضہ  
 کی رقوم میں حاصل کر نیکیے لئے فرض کرو



$$س + لا = ع، س - لا = ب، جسے ۲س = ع + ب، ۲لا = ع - ب$$

اسلئے لا میں وہ مساوات جو س کو سا قفا کرنے سے حاصل ہوتی ہے نیم فرقوں کی مساوات ہے اور س میں چھٹے درجہ کی مساوات نیم مجموعوں کی مساوات ہے۔ نوٹ کے طریقہ تحویل سے موخر الذکر مساوات کو فوراً شکل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-

$$۲ - ۶ = ع - ۶ + ب = ۰ \quad (\text{مثال ۲۱ سے مقابلہ کرو})$$

چار درجہ کی کو حل کرنے کے لئے اس آخری مساوات سے حاصل ہوتا ہے  $ع = ۶$ ۔ جہاں طہ محول کعبی کی ایک اصل ہے۔ پس

$$۶ = س + ب = لا + طہ - ۵ = لا = ۶ - ۵ = ۱ \quad \frac{۱}{۱} = (۱ + ۵۳ + \frac{۱}{۶}) \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۶} \quad گ$$

جس سے بالآخر

$$لا + ب = ۶ = لا + طہ - ۵ + طہ - ۵۲ = لا + ۲طہ - ۵۷ = گ$$

جو ایک ایسا جملہ ہے جسکی صرف چار قیمتیں ہیں اور جس میں چار درجہ کی اصل محول کعبی کی ایک واحد اصل کی رقوم میں بیان ہوئی ہے۔  
۲۷۔ ثابت کرو کہ ایک دی ہوئی کعبی مساوات کی ایک اصل طہ کا ہر منطبق جبری تفا عام طور پر شکل

$$\frac{ج + ج + طہ}{ج + ج + طہ}$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ دیا ہوا تفا عمل  $\frac{ف (طہ)}{پ (طہ)}$  ہے جہاں ف (طہ) اور پ (طہ)

طہ کے کسی درجہ کے منطبق صحیح تفا عمل ہیں۔ دئے ہوئے کعبی کو متواتر تحویل کرنے سے انہیں سے ہر ایک تفا عمل دو درجہ کی تفا عمل میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس دیا ہوا تفا عمل



نشان

$$2 + 2 + 2 = 6$$

(153)

۲۹ - جیب مساوات

ہر کی حسب ذیل قسمیوں میں سے کسی سے پوری ہو

$$(4) \sqrt{\frac{ع}{11}} \quad (5) \frac{ع 3}{ع 4} \quad (6) \frac{ع 3}{ع 4} \quad (7) \frac{ع 3}{ع 4}$$

جوابات :- (۱)  $a + b + c = 0$  (۲)  $b + c = 0$

(۴) (۱) یہ جید - عمدہ ہے۔ (۵) (جہ - عی) (بہ - ضہ) - مسہ (غہ - بہ) (جہ - فہ) =



$$(۶) (۷) = ج - ج = -$$

۳۰۔ یہ متماثلہ ثابت کرو

$$۱ (۷ - ۲) = ۱ (۷ - ۳) = ۱ (۷ - ۲)$$

$$+ ۲ (۷ - ۲) = ۲ (۷ - ۲)$$

اسکو اس طرح ثابت کیا جاسکتا ہے :- ع اور جے کی قیمتوں میں ۱ = - رکھنے سے اور پھیلا نے سے یہ فوراً معلوم ہوتا ہے کہ ۷ کا وہ حصہ جس میں ۱ نہیں آتا شکل

$$۱ (۷ - ۲) + ۲ (۷ - ۲) = ۳ (۷ - ۲)$$

میں تحویل کیا جاسکتا ہے -

اب ۱، ۲، ۳ کی جگہ ۱، ۲، ۳ رکھنے سے اور ان مقداروں کی

جگہ دفعہ ۳ کی قیمتیں درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے -

۳۱۔ جب چار درجہ کی دو اصلیں مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ یو لڑ کے

کبھی کی دو اصلیں مساوی ہوتی ہیں جنکی مشترک قیمت

$$۱۳ - ۲ = ۷$$

$$۷$$

ہے اور پھر یہ ثابت کرو کہ اس صورت میں چار درجہ کی باقی دو اصلیں حقیقی ہیں

یا مساوی یا خیالی ہو جب اسکے کہ ۷ - ۱۳ = ۷ منفی ہو یا منفر یا مثبت

۳۲۔ ثابت کرو کہ (۱) جب چار درجہ کی مساوی اصلوں کے دو مختلف

زوج ہوں تو مربع دار فرقوں کی مساوات کی آخری دو رشتیں (دفعہ ۶) معدوم

ہو جاتی ہیں اور شرطیں ۷ = ۷ - ۱۳ = ۷ حاصل ہوتی ہیں

اور یہ کہ (۲) جب اسکی تین اصلیں مساوی ہوں تو اس مساوات کی آخری

تین رشتیں معدوم ہو جاتی ہیں اور شرطیں ۷ = ۷ - ۱۳ = ۷ حاصل ہوتی ہیں -



قبل الذکر صورت میں بتاؤ کہ یہ شرطیں ان شرطوں کے ساتھ مماثلت رکھتی ہیں جو مثال ۳ دفعہ ۶۱ اور مثال ۱۲ صفحہ (۲۱۷) میں حاصل ہوئی ہیں۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ مربع دار فرقوں کی مساوات قبل الذکر صورت میں فہ<sup>۱</sup> (۱۲ + ۱۲ھ) میں اور موخر الذکر صورت میں فہ<sup>۲</sup> (۱۶ + ۱۶ھ) میں تحویل ہوتی ہے۔

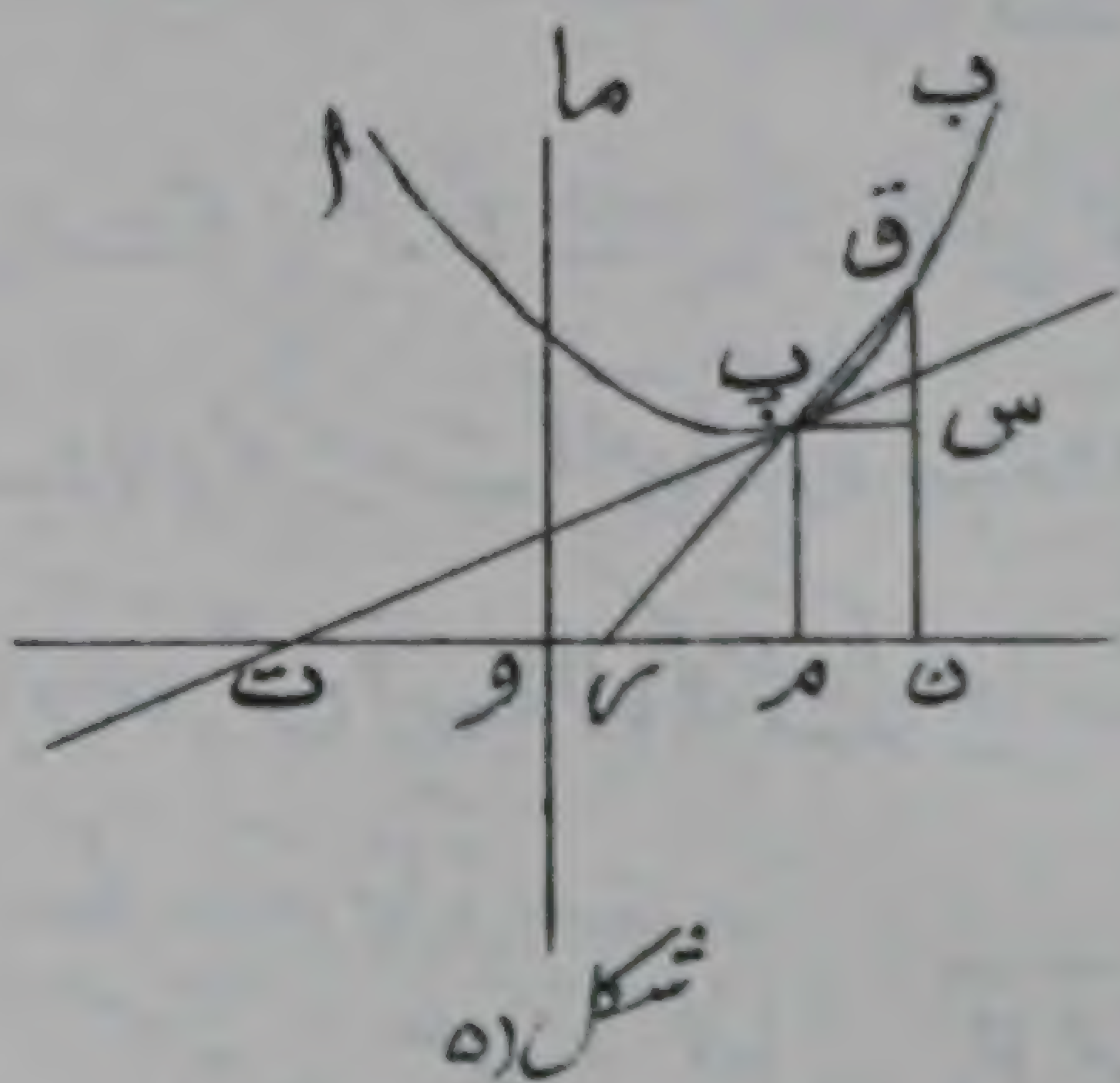
---



(154)

سائلوں کا باب  
مشق تفاعلوں کے خواص

۶۹۔ مشق تفاعل کی تریسمی تعبیر





$$ف(لا + ہ) = ف(لا) + ف(لا) + ہ \frac{ف(لا)}{۲ \times ۱} + ہ \dots$$

$$\text{یعنی } \frac{ف(لا + ہ) - ف(لا)}{ہ} = \frac{ف(لا) + ف(لا) + ہ \frac{ف(لا)}{۲ \times ۱} + ہ \dots - ف(لا)}{ہ}$$

$$\text{لیکن } \frac{ف(لا + ہ) - ف(لا)}{ہ} = \frac{ف(لا)}{۱} = \frac{ف(لا)}{۱} = \frac{ف(لا)}{۱}$$

$$= \frac{ف(لا)}{۱} = \frac{ف(لا)}{۱} = \frac{ف(لا)}{۱}$$

اب اگر ہ کو غیر محدود دیکھا دیا جائے تو ق، پ کے نزدیک آتا ہے اور بالآخر اس پر منطبق ہو جاتا ہے۔ پ، ق نقطہ پ پر منحنی کا مماس بن جاتا ہے۔ زاویہ پ، ق، پ، ق ہو جاتا ہے۔ نیز مساوات (۱) کی دائیں جانب کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے غیر محدود گھٹ جاتی ہیں اور بالآخر ہ = ۰ کے لئے معدوم ہوتی ہیں۔ اس لئے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

$$م = ق(لا) = ف(لا)$$

جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ لا کی کسی قیمت کو درج کرنے سے مشتق تفاعل ف(لا) جو قیمت اختیار کرتا ہے وہ اس زاویہ کے مماس سے تعبیر ہوتی ہے جو تفاعل ف(لا) کو تعبیر کرنیوالے منحنی کے متناظر نقطہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے۔

۱۔ کثیر الارقام کی اعظم اور اقل قیمتیں۔ لا کی کوئی قیمت جو ف(لا) کو اعظم یا اقل بنادے مشتق مساوات ف(لا) = ۰ کی ایک اہل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ لا کو قیمت عہ دینے سے ف(لا) اقل ہوتا ہے۔ ہم بتانا کریں گے کہ ف(لا) = ۰۔ فرض کرو کہ ہ سے لا کا چھوٹا اضافہ یا چھوٹا گھٹاؤ تعبیر ہوتا ہے۔ اب چونکہ ف(عہ) اقل ہے اس لئے



ف (ع) > ف (ع + ۵) نیز ف (ع) > ف (ع - ۵)  
پس ف (ع + ۵) - ف (ع) اور ف (ع - ۵) - ف (ع) دونوں مثبت  
ہیں یعنی ذیل کے دو جملے مثبت ہیں :-

$$ف (ع) + ۵ + \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} + ۵ + \dots$$

$$- ف (ع) + ۵ + \frac{ف (ع)}{۲ \times ۱} - ۵ - \dots$$

اب ہم یہ جانتے ہیں کہ جب 'ہ' بہت چھوٹا ہو تو ان جملوں کی علامتیں وہی  
ہوتی ہیں جو انکی پہلی رقموں کی ہیں۔ پس دونوں جملوں کو مثبت ہونیکے لئے  
ف (ع) کو معدوم ہونا چاہئے اور علاوہ انہیں ف (ع) کو مثبت ہونا چاہئے  
بالکل اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ جب 'ف (ع) عظم ہو تو

ف (ع) = - اور ف (ع) کو منفی ہونا چاہئے۔ اسلئے کثیر الارقام

ف (لا) کی عظم اور اقل قیمتوں کو معلوم کرنے کے لئے مساوات ف (لا) = کو  
حل کر کے اسکی اصلوں کو ف (لا) میں درج کرنا چاہئے۔ ہر اصل سے ایک  
عظم یا اقل قیمت ملے گی اور عظم یا اقل قیمت کا امتیاز ف (لا) کی علامت سے  
ہوگا جب ہمیں لا کی بجائے وہ اصل درج کیجائے چنانچہ جب 'ف (لا) منفی

ہو تو قیمت عظم ہوگی اور جب 'ف (لا) مثبت ہو تو قیمت اقل۔

اس دفعہ کا مسئلہ

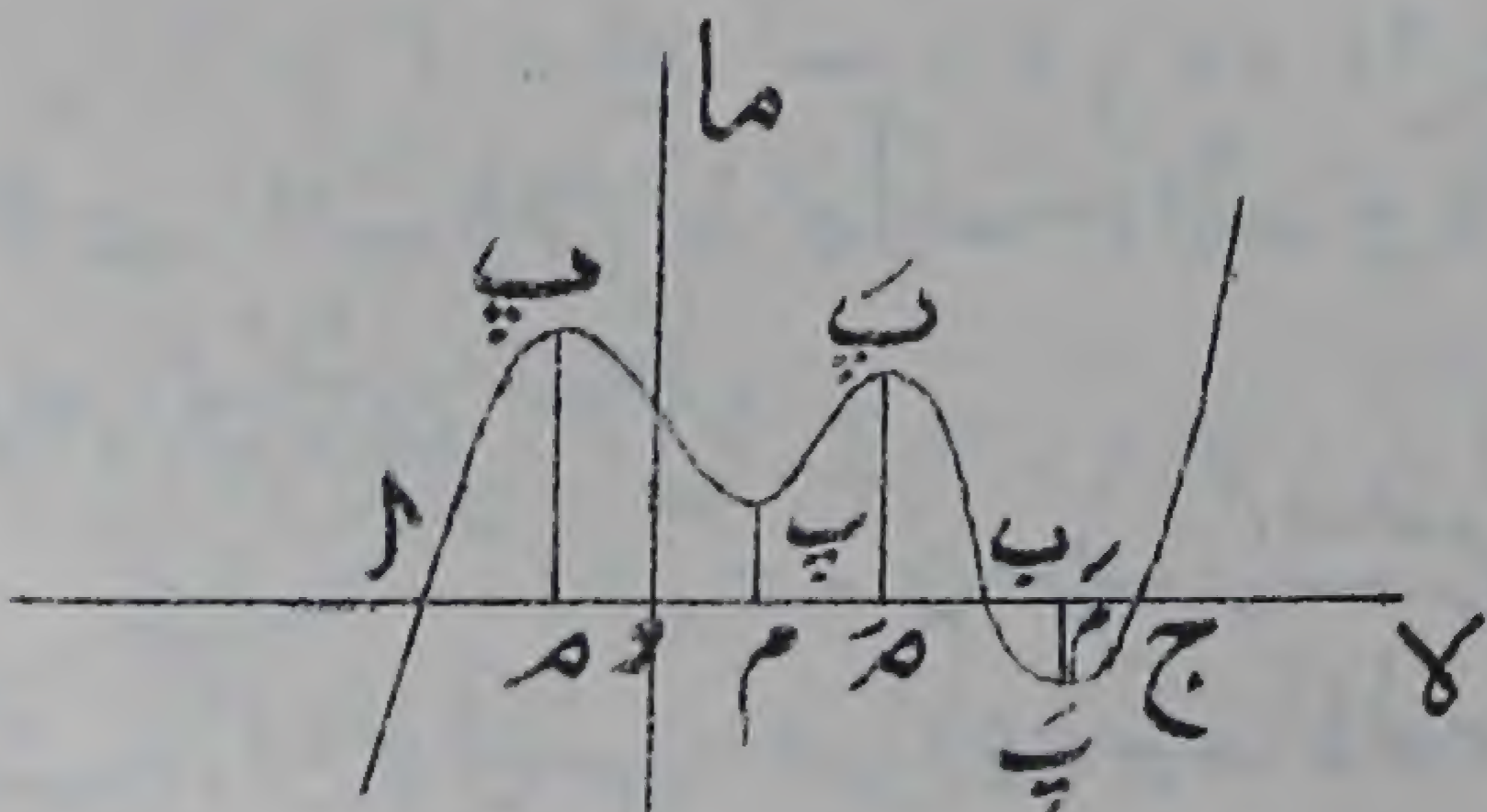
دفعہ ۶۹ کے عمل سے

فوراً حاصل ہوتا ہے

کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ

جب 'ف (لا) کی قیمت

عظم ہو جیسے پ پ



شکل (۶)



(شکل ۶) پریاقل ہو جیسے پ، پ پر تو منحنی کا حماس محور وکلا کے متوازی ہو گا اور اس لئے

مس جیات م = ف (لا) =  
 شکل ۶ پانچویں درجہ کے کثیرالار قیام کو تعبیر کرتی ہے۔ ف (لا) = کی  
 چار اصلوں کے جواب میں (جنکا حقیقی ہونا اس صورت میں فرض کر لیا گیا ہے)  
 یعنی و م، و م، و م کے جواب میں دو اعظم قیمتیں م پ، م پ  
 اور دو اقل قیمتیں م پ، م پ ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ف (لا) =  $۲لا^۲ + لا - ۶$   
 کی اعظم یا اقل قیمت معلوم کرو۔

ف (لا) =  $۱ + لا$ ، ف (لا) = ۴

لا =  $\frac{۱}{۴}$  سے ف (لا) =  $\frac{۴۹}{۸}$  اور یہ اقل قیمت ہے۔

(دیکھو شکل ۲ صفحہ ۲۰)

۲۔ ف (لا) =  $۲لا^۳ - لا^۳ - ۳لا^۲ + لا + ۱۴$   
 کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

ف (لا) =  $۶(لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱)$ ، ف (لا) =  $۶(لا^۲ - لا - ۱)$

لا = ۲ سے ف (لا) = ۶۸ جو اعظم قیمت ہے۔

لا = ۳ سے ف (لا) = ۶۷ جو اقل قیمت ہے۔

۳۔ ف (لا) =  $۳لا^۴ - لا^۴ - ۱۶لا^۳ + ۶لا^۲ - ۸لا + ۷$   
 کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

یہاں ف (لا) = ۰ کی صرف ایک حقیقی اصل ہے لا = ۴ اور اس سے

اقل قیمت حاصل ہوتی ہے ف (لا) = ۳۴۵۔

۴۔ ف (لا) =  $۱۰لا^۴ - لا^۴ - ۱۷لا^۳ + لا^۲ + ۶$







ایک کثیر الارقام کی دو متصلہ صفر قیمتوں کے درمیان متعدد اعظم اور اقل قیمتیں ہو سکتی ہیں۔ اس کا دوسرا حصہ مسئلہ بالا سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے کیونکہ اگر ف (لا) = . کی دو متصلہ اصلوں کے درمیان ف (لا) = . کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں تو ف (لا) = . کی دو اصلیں ایسی ہوتگی جن کے درمیان ف (لا) = . کی کوئی اصل نہیں ہوگی اور یہ رول کے مسئلہ کے خلاف ہے۔

۷۲۔ مشتق تفاعلوں کی ترکیب۔ فرض کرو کہ مساوات  $f(x) = 0$ ۔

کی اصلیں عہد، عہد، عہد..... عہد ہیں تو

ف (لا) ≡ (لا - عم) (لا - عم) ..... (لا - عن)  
اس تمامہ میں لا کی بجائے ما + لا درج کرو تو

$$F = (a + b) = (a + b - c + c) = (a + b - c) + c = \dots = (a + b - n + n) = (a + b - n) + n$$

$$= m_0^0 + q_1 m_1^{0-1} + q_2 m_2^{0-2} + \dots + q_n m_n^{0-n}$$

(158) جہاں

$$Q_1 = \text{لا} - \text{عم}_1 + \text{لا} - \text{عم}_2 + \text{لا} - \text{عم}_3 + \dots + \text{لا} - \text{عم}_n$$

$$Q_2 = (\text{لا} - \text{عم}_1)(\text{لا} - \text{عم}_2) + (\text{لا} - \text{عم}_1)(\text{لا} - \text{عم}_3) + \dots + (\text{لا} - \text{عم}_1)(\text{لا} - \text{عم}_n)$$

$$\dots$$

$$ق_1 = (لا - عم) (لا - عم) \dots (لا - عم) + (لا - عم) \dots (لا - عم) \dots (لا - عم) + \dots$$

$$+ (لا - عم_1)(لا - عم_2) \dots (لا - عم_n) = ق_n$$

لیکن

$$ف(ما+لا) = ف(لا) + ف(لا) + \dots + \frac{ف(لا)}{2 \times 1} + \dots + 1$$

اسے



ف (لا) = ق ن = (لا - عم) (لا - عم) ..... (لا - عم) (لا - عم) -  
 ف (لا) = ق ن = (لا - عم) (لا - عم) ..... (لا - عم) (لا - عم) + ... جیسا اوپر لکھا گیا -  
 ف (لا) = ق = ق = ق کی وہ قیمت جو لا اور اصلوں کی قوم میں اوپر درج ہے -  
 ف (لا) کی قیمت کو آسانی کے ساتھ یوں لکھا جاسکتا ہے :-

$$ف (لا) = \frac{ف (لا)}{لا - عم} + \frac{ف (لا)}{لا - عم} + \frac{ف (لا)}{لا - عم} + \dots + \frac{ف (لا)}{لا - عم}$$

۳۔۔۔ ضعیفی اصلیں۔ مسئلہ :- اگر مساوات ف (لا) =۔ کی  
 ایک ضعیفی اصل م میں رتبہ کی ہو تو یہ اصل پہلی مشتق مساوات ف (لا) =۔  
 کی (م - ۱) ویں رتبہ والی ضعیفی اصل ہوگی۔

دفعہ سابق میں ف (لا) کے لئے جو جملہ اصل ہو اس سے یہ مسئلہ فوراً حاصل  
 ہوتا ہے کیونکہ اگر ف (لا) میں جزو ضربی (لا - عم) واقع ہو یعنی  
 اگر عم = عم = عم = ..... = عم تو

$$ف (لا) = \frac{م ف (لا)}{لا - عم} + \frac{ف (لا)}{لا - عم} + \dots + \frac{ف (لا)}{لا - عم}$$

بائیں جملہ میں ہر رستم کا ایک جزو ضربی (لا - عم) ہے سوائے پہلی رقم کے  
 جس میں (لا - عم) جزو ضربی کے طور پر ہے۔ پس (لا - عم) ف (لا)  
 کا ایک جزو ضربی ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ کوئی اصل جو مساوات ف (لا) =۔ میں م  
 مرتبہ واقع ہوتی ہے پہلی مشتق مساوات میں (م - ۱) مرتبہ دوسری میں  
 (م - ۲) مرتبہ ..... (م - ۱) ویں مشتق مساوات میں ایک مرتبہ واقع ہوگی۔



چونکہ ف (لا) سے ف (لا) اسی طرح حاصل ہوتا ہے جس طرح  
ف (لا) سے ف (لا) اسلئے ابھی ثابت کئے ہوئے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ  
ف (لا) میں (لا - عہ) ۱-۲ جزو ضروری کے طور پر شامل ہوگا۔ تیسرے مشتق  
تفاعل ف (لا) میں (لا - عہ) ۱-۲ شامل ہوگا اور علیٰ ہذا۔

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ف (لا) اور اسکے پہلے (م - ۱) مشتق تفاعل  
سب کے سب لا کی قیمت عہ کے لئے معدوم ہو جائیں تو (لا - عہ) ۱  
ف (لا) کا جزو ضروری ہوگا۔

یہ پچھلے نتیجہ صریح کا عکس ہے اور بلا واسطہ آسانی کے ساتھ یوں ثابت کیا جاسکتا  
ہے۔ مشتق تفاعلوں کو ف (لا) ۱، ف (لا) ۲، ...، ف (لا) م سے تعبیر کرو  
(دیکھو دفعہ ۶) اور لا کی بجائے عہ + لا - عہ درج کرو تو ف (لا) کو شکل ذیل  
میں پھیلایا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} & \text{ف (عہ)} + \text{ف م (عہ)} (لا - عہ) + \frac{\text{ف م (عہ)}}{۲ \times ۱} (لا - عہ) + \dots \\ & + \frac{\text{ف م - ۱ (عہ)}}{(۱ - م) \times \dots \times ۲ \times ۱} (لا - عہ) + \frac{\text{ف م (عہ)}}{م \times \dots \times ۲ \times ۱} (لا - عہ) + \dots \\ & + \frac{\text{ف ن (عہ)}}{ن \times \dots \times ۲ \times ۱} (لا - عہ) \end{aligned}$$

جس سے مسئلہ کی صداقت ظاہر ہے۔

۴۷۔ ضعیفی اصولوں کی تعین۔ پچھلے دفعہ سے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ

نکالا جاسکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک جزو ضروری (لا - عہ) ۱-۲  
ہو تو (لا - عہ) ۱ ف (لا) کا ایک جزو ہوگا۔ کیونکہ نتیجہ صریح (۱) کی رو سے



ف (لا) کے بعد کے (م - ۳) مشتق تفاعل 'ف (لا) اور ف (لا) کے ساتھ  
معدوم ہوتے ہیں جبکہ لا = عہ - پس ف (لا) کی ایک اصل م رتبہ کی ہے۔  
اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے دوسرے مشترک  
اجزائے ضربی

ف - ۱ (لا - بہ) (لا - جہ) (لا - ضہ) ۱ - ۱ وغیرہ

ہوں تو مساوات ف (لا) = کی ف اصلیں بہ کے مساوی ہونگی 'ق  
اصلیں جہ کے مساوی 'ر اصلیں ضہ کے مساوی 'و غیرہ۔  
اس لئے یہ معلوم کر نیکی لئے کہ کسی مجوزہ مساوات کی ضعیفی اصلیں موجود ہیں  
یا نہیں اور اگر موجود ہیں تو انکی تعین کے لئے ہمیں ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک  
مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنا چاہیے۔ فرض کرو یہ ف (لا) ہے تو مساوی اصلوں کی  
تعین مساوات ف (لا) = کے حل پر منحصر ہوگی۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - ۱۶ لا + ۲۰ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا - ۲ ہے۔ پس (لا - ۲) '۱

ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ دوسرا جزو لا + ۵ ہے۔

ف (لا) کے ضعیفی اجزائے ضربی کو معلوم کر نیکی بعد اگر باقی اجزائے ضربی حاصل کرتا ہو تو  
دفعہ ۸ کا تقسیم کا طریقہ متواتر استعمال کرنا سہولت بخش ہوگا۔ مثلاً یہاں ہم لا - ۲ سے  
دو مرتبہ تقسیم کرتے ہیں، عمل حساب کا طریقہ ذیل میں درج ہے :-

$$\begin{array}{r} ۱۶ - ۲۰ \\ ۲۰ - ۱۶ \\ \hline ۱۰ - ۳ \\ ۱۰ - ۲ \\ \hline ۵ - ۱ \end{array}$$



اس طرح دوسرا اور ۵ باقی رہ جاتے ہیں یعنی تیسرا جزو ضربی لا + ۵ ہے۔  
اس عمل سے گذشتہ نتیجہ کی تصدیق ہوتی ہے کہ ہر تقسیم کے بعد باقی معدوم ہوتے ہیں  
جیسا کہ ہونا چاہیے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۵ - لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ + لا - ۶ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں اور بقیہ جزو ضربی معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا<sup>۲</sup> - لا + ۱ ہے۔ پس (لا - ۱)<sup>۳</sup>،  
ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہے۔ لا - ۱ سے تین مرتبہ متواتر تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا  
ف (لا) = (لا - ۱) (لا<sup>۲</sup> + لا + ۱) (لا + ۶)

۳۔ مساوات

$$لا^۴ - لا^۳ - لا^۲ + لا + ۳۶ = ۰$$

کی ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم لا<sup>۲</sup> - لا - ۶ ہے۔ اس کے اجزا  
لا + ۲ اور لا - ۳ ہیں۔ پس

$$ف (لا) = (لا + ۲) (لا - ۳)$$

۴۔ کثیرالارقام

$$ف (لا) = لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ - لا - ۸$$

کے تمام اجزائے ضربی معلوم کرو۔

$$جواب :- ف (لا) = (لا - ۱) (لا + ۱) (لا - ۲)$$

کثیرالارقام اور اسکے پہلے مشق کا مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنیکا معمولی عمل بہت  
محنت طلب ہوتا جائیگا جیسے جیسے تفاعل کا درجہ بڑھتا جائیگا اسلئے یہ کہنا جیسا کہ مساواتوں کے نظریہ  
کی اکثر کتابوں میں کہا جاتا ہے غلط ہے کہ عددی مساواتوں کی ضعیفی اصلوں کو معلوم کرنیکا  
یہ طریقہ سادہ طریقہ ہے اور یہ کہ وہ اصلوں کے متعلق مزید تحقیقات کے لئے ضروری ہے۔  
اسٹرم (Sturm) کے مسئلہ کے سلسلہ میں اس طریقہ کی کچھ عملی قدرت  
ہے۔ ہم ضعیفی اصلوں کی بحث کو دسویں باب تک ملتوی کرتے ہیں جہاں اس مسئلہ پر



غور کیا جائیگا۔ نیز گیارہویں باب میں یہ بتایا جائیگا کہ چھٹے درجہ سے کم درجوں کی مساواتوں کی ضلعی اصلیں کسی مخصوص مثال میں سادہ طریقوں سے معلوم ہو سکتی ہیں جنہیں مقسوم علیہ نکالنے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

۵۔ اس دفعہ اور اگلے دفعہ میں وہ مسئلے بیان کئے جائینگے جو مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنے کے طریقوں کی آئینہ کاری بحث میں بہت اہم اور کارآمد ثابت ہونگے۔

مسئلہ۔ مساوات  $F(لا) =$  کی حقیقی اصل  $ع$  سے ذرا

چھوٹی  $لا$  کی قیمت  $ع - ہ$  سے ذرا بڑی قیمت  $ع + ہ$  تک مسلسل گزرنے میں کثیر الارقام  $F(لا)$  اور  $F(لا)$  کی علامتیں اصل میں سے گزرنے سے عین پہلے مختلف ہوتی ہیں اور گزرنے کے عین بعد موافق  $F(لا)$  اور  $F(لا)$  میں  $لا$  کی بجائے  $ع - ہ$  درج کرنے سے اور اور پھیلانے سے

$$F(ع - ہ) = F(ع) - F(ع) + \frac{F(ع) - F(ع)}{2 \times 1} + \dots$$

$F(ع - ہ) = F(ع) - F(ع) + \dots$  اب چونکہ  $F(ع) =$  اسلئے ان جلوں کی علامتیں انکی پہلی رقتوں پر منحصر ہونگی وجہ سے مختلف ہیں۔ اگر  $ہ$  کی علامت بدلے جائے تو ان جلوں کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ اسلئے مسئلہ ثابت ہو گیا۔

نتیجہ صریح۔ مسئلہ بالا درست رہتا ہے جب  $ع$  مساوات

$F(لا) =$  کی کسی رتبہ کی ضلعی اصل ہو۔

فرض کرو کہ اصل  $ر$  مرتبہ تکرار پاتی ہے تو ذیل کے تفاعل (جنہیں زیر کی بجائے لاحق استعمال ہوئے ہیں) سب کے سب معدوم ہو سکتے ہیں:-

$$F(ع) - F(ع) + F(ع) - F(ع) + \dots - F(ع) + F(ع)$$



ف (عہ - ۵) اور ف (عہ - ۵) کے سلسلوں میں وہ پہلی رت میں جو معدوم نہیں ہوتیں یہ ہیں

$$\frac{ف (عہ - ۵)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (۵-۱)} \quad \frac{ف (عہ - ۵)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (۵-۱)}$$

ظاہر ہے کہ انکی علامتیں مختلف ہیں، لیکن جب 'د' کی علامت کو تبدیل کیا جاتا ہے تو ان رتوں کی علامتیں وہی ہو جاتی ہیں۔ پس مسئلہ درست ہے۔  
۷۶۔ سلسلہ

ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)، ف (لا)

کے ہر دو متصل تفاعلوں پر دفعہ ماسبق کا استدلال جاری کیا جائے تو مسئلہ کو عام صورت میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے:-

مسئلہ۔ جب کسی مساوات ف (لا) = کی ایک اصل رتبہ

کی ہو اور ع سے ذرا کم قیمت لا کو دی جائے تو اس سلسلہ کے رتفاعلوں کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی یا منفی اور مثبت ہونگی لیکن ع سے ذرا بڑی قیمت لا کو دی جائے تو یہ سب تفاعل ہم علامت ہونگے اور مزید بریں یہ علامت وہی ہوگی جو ف (عہ) کی ہے

یعنی اس پہلے تفاعل کی جو لا کی بجائے ع درج کرنے سے معدوم نہیں ہوا اس مسئلہ کے استعمال کو پوری طرح ذہن نشین کرنے کے لئے فرض کر لو

ف (عہ) وہ پہلا تفاعل ہے جو لا کی بجائے ع درج کرنے سے معدوم نہیں ہوتا اور فرض کرو کہ اسکی علامت منفی ہے۔ اس مسئلہ سے جو نتیجہ اخذ کیا جاسکتا ہے وہ یہ ہے کہ لا کی قیمت ع - ۵ کے لئے تفاعلوں کے

سلسلہ ف، ف، ف، ف، ف کی علامتیں ہیں



اور لا کی قیمت  $ع + ۵$  کے لئے انکی علامتیں ہیں

کیونکہ اصل میں سے گزرنے سے پہلے ف کی علامت ف کی علامت سے مختلف ہوتی چاہئے، ف کی علامت ف سے مختلف ہونی چاہئے اور علیٰ ہذا۔ اور اصل میں سے گزرنے کے بعد سب تفاعلوں کی علامتیں وہی ہونی چاہیں۔ یہاں ہم نے فی الحقیقت یہ تسلیم کیا ہے کہ ۵ استقدر چھوٹا ہے کہ ف (لا) = کی کوئی اصل اس وقفہ کے اندر داخل نہیں ہوتی جیسے سے لا گزرتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف (لا) = لا + لا + لا - لا - لا + لا = ۰$$

کی ضعفی اصلیں معلوم کرو۔

جواب :-  $ف (لا) = (لا + لا - لا - لا) = ۰$

۲۔ ثابت کرو کہ ثنائی مساوات

$$لا - لا = ۰$$

میں مساوی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$لا - ن ق لا + (ن - ۱) ر = ۰$$

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر

$$ق = ۱ - ن$$

۴۔ ثابت کرو کہ مساوات



$$لا + ۵ ف = لا + ۳ ف + ۲ لا + ق =$$

کی دو اصلیں مساوی ہونگی اگر  $ق + ۲ + ۴ ف = ۵$ ۔ اور یہ کہ اگر مساوی اصلوں کا ایک زوج موجود ہو تو مساوی اصلوں کا ایک دوسرا زوج بھی موجود ہوتا چاہئے۔  
۵۔ دفعہ ۲ کا طریقہ استعمال کر کے وہ بشرط معلوم کرو کہ کبھی مساوات  
 $ی + ۳ + ۵ ی + گ =$

کی دو اصلیں مساوی ہوں۔  
مقسوم علیہ اعظم معلوم کر نیلے عمل میں آخری باقی کو معدوم ہو جانا چاہئے۔

$$جواب :- گ + ۲ + ۴ ہ = ۳$$

۶۔ اسی طریقہ کو استعمال کر کے بتاؤ کہ گ اور ۴ دونوں معدوم ہوتے ہیں جب کبھی کی تین اصلیں مساوی ہوں۔

۷۔ اگر چار درجہ ف (لا) = کی اصلیں ع، ہ، ج، ضہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ف (ع) + ف (ہ) + ف (ج) + ف (ضہ)$$

کو تین اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

$$جواب :- (ع + ہ + ج - ضہ) (ع + ج - ہ - ضہ)$$

$$(ع + ضہ - ہ - ج)$$

۸۔ اگر ف (لا) = کی اصلیں ع، ہ، ج، ضہ، وغیرہ ہوں اور ف (لا) = کی اصلیں ع، ہ، ج، ضہ، وغیرہ تو ثابت کرو کہ

$$ف (ع) + ف (ہ) + ف (ج) + ف (ضہ) = ... = ن ف (ع) + ف (ہ) + ف (ج) + ...$$

اور یہ کہ ہر ایک اصل مساوات کی رقم مطلق کے مساوی ہے جسکی اصلیں فرقونے مرتب ہیں۔

۹۔ اگر مساوات

$$لا + ۱ ف - ۱ + ۲ ف - ۲ + ... + ن ف - ن + لا + ف =$$

کی ایک دوہری اصل ع ہو تو ثابت کرو کہ ع، مساوات

$$ف - لا + ۱ ف - ۱ + ۲ ف - ۲ + ... + ن ف - ن + لا + ف =$$



(164)

کی ایک اصل ہے۔

۱۰۔ بتاؤ کہ کبھی

$$۱ \text{ لا}^۳ + ۳ \text{ ب لا}^۲ + ۳ \text{ ج لا} + د$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

$$۱ \text{ را}^۲ - ۲ \text{ گ ر} + ۴ = ۰$$

کی اصلیں ہیں جہاں ۵ ممیز ہے۔

ف (لا) کو تعبیر کریں گے منحنی کو اگر محور ما کے متوازی (دیکھو دفعہ ۱۰) اعظم یا اقل قیمت را کے مساوی فاصلے میں سے حرکت دی جائے تو محور لا منحنی کا مماس ہو جائیگا یعنی مساوات ف (لا) - ر = ۰ مساوی اصلیں رکھے گی۔ پس اعظم اور اقل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ف (لا) - را کا ممیز بنانے سے یا گ + ۴ = ۰ میں د کی بجائے د - را رکھنے سے۔

۱۱۔ اسی طرح ثابت کرو کہ

$$۱ \text{ لا}^۴ + ۴ \text{ ب لا}^۳ + ۶ \text{ ج لا}^۲ + ۴ \text{ د لا} + س$$

کی اعظم اور اقل قیمتیں مساوات

$$۱ \text{ را}^۳ - ۳ (۱ \text{ ع} - ۹ \text{ ہ}) \text{ را}^۲ + ۳ (۱ \text{ ع} - ۱۸ \text{ جے}) \text{ ر} - ۴ = ۰$$

کی اصلیں ہیں جہاں ۵ چار درجہ کا ممیز ہے۔

۱۲۔ تفاعل

$$\text{ف (لا)} = ۱ \text{ لا}^۴ - ۴ \text{ لا}^۳ + ۱۵ \text{ لا}^۲ - ۱۳ \text{ لا} + ۴$$

پر دفعہ ۶ کا مسئلہ استعمال کرو۔

یہاں

$$\text{ف (لا)} = ۱ \text{ لا}^۴ - ۴ \text{ لا}^۳ + ۱۵ \text{ لا}^۲ - ۱۳ \text{ لا} + ۴$$

$$\text{ف (لا)} = ۲ (۱ \text{ لا}^۳ - ۶ \text{ لا}^۲ + ۱۵ \text{ لا} - ۱۵)$$

$$\text{ف (لا)} = ۲ (۱ \text{ لا}^۲ - ۱۲ \text{ لا} + ۲۱)$$

$$\text{ف (لا)} = ۲۲$$

یہاں ف (لا) پہلا تفاعل ہے جو معدوم نہیں ہوتا جبکہ لا = ۱ اور



فسم (۱) منفی ہے۔ مسئلہ سے یہ ثابت ہے کہ ایک سے ذرا کم قیمت کے لئے  
 ف، ف، ف، فسم کی علامتیں ہیں + - + - اور ایک سے ذرا بڑی  
 قیمت کے لئے ان سب کی علامتیں منفی ہیں۔ علامتوں کے اس سلسلہ سے ہم  
 تفاعلوں ف، ف، وغیرہ کو نقطہ لا = ۱ کے قرب میں مرتب کر سکتے ہیں۔ چنانچہ  
 ف (لا) کو تعبیر کرنیوالا منفی وضعی نقطہ لا = ۱ تک پہنچنے سے قبل محور لا کے  
 اوپر ہے اور پہنچنے کے عین بعد محور کے نیچے اور محور منفی کو تین منطبق نقطوں پر قطع  
 کرتا ہے کیونکہ ف (لا) کا ایک جزو ضربی (لا - ۱) ہے۔ ف (لا) کو تعبیر  
 کرنیوالا منفی نقطہ لا = ۱ میں سے گزرنے سے پہلے اور بعد دونوں صورتوں میں  
 محور کے اوپر ہوگا۔ وہ محور کو اس نقطہ پر مس کریگا۔ فسم (لا) کو تعبیر کرنے والا  
 منفی نقطہ میں سے گزرنے سے پہلے محور کے اوپر اور گزرنے کے بعد محور کے نیچے ہوگا اور  
 محور کو اس نقطہ پر قطع کریگا۔



# اٹھوان با

## اصول کے متشاكل تفاعل

۷۷۔ نیوٹن کا مسئلہ۔ اصولوں کی قوتوں کے مجموعے۔

اب ہم مساوات کی اصولوں کے متشاكل تفاعلوں کی بحث کی طرف رجوع کرتے ہیں۔ ان کا کچھ ذکر پہلے (صفحہ ۲۷۷) میں آچکا ہے۔ یہاں ہم ان تفاعلوں سے متعلق چند عام مسائل ثابت کریں گے۔

مسئلہ ۱۔ کسی مساوات کی اصولوں کی متشابه قوتوں کے مجموعے سروں کے رقوم میں منطبق طور پر بیان ہو سکتے ہیں۔  
فرض کرو کہ مساوات ہے

$$f(l) = l^k + b_1 l^{k-1} + b_2 l^{k-2} + \dots + b_n$$

$\equiv (l - e_1)(l - e_2) \dots (l - e_n)$   
اب ہم سروں  $b_1, b_2, \dots, b_n$  کی رقوم میں  $e_1, e_2, \dots, e_n$  کو معنی عام ترقیم کے مطابق  $s_1, s_2, \dots, s_n$  کو محسوب کریں گے۔

صفحہ ۷۷ کی رو سے

$$f(l) = \frac{f(l)}{l - e_1} + \dots + \frac{f(l)}{l - e_n} + \frac{f(l)}{l - e_{n+1}}$$



$$+ \text{ب.ن. - ۱}$$

اور دفعہ ۸ کے طریقہ سے تقسیم کیا جائے تو

$$\frac{f(n)}{n!} = \frac{n! + n! + \dots + n!}{n!} = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

|              |            |            |            |
|--------------|------------|------------|------------|
| ۲-ن + بیامعه | ۲ + بیامعه | ۱ + بیامعه | ۱ + بیامعه |
| ۳-ن + بیامعه | ۱ + بیامعه | ۱ + بیامعه |            |
| ..... +      | ۱ + بیامعه |            |            |
| ..... +      |            |            |            |

(166)

۴۰۰-۲-۲۰۰

+

اگر اس مساوات میں  $E$  کی بجائے مقداروں  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$  بنائیں تو  
ہر ایک کے بعد دیگرے رکھ دیجائے اور اگر  $S = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n$   
تو ان تمام نتیجوں کو جمع کرنے سے  $Q$  (لا) کی قیمت حسب ذیل  
حاصل ہوگی:۔

|                     |                |                  |                            |
|---------------------|----------------|------------------|----------------------------|
| ف (لا) = ن لا + س ا | لا ن - ۲ + س م | لا ن - ۳ + س س م | لا ن - ۴ + ..... + س ن - ۱ |
| + ن ب ا             | + ب ب س ا      | + ب ب س م        | + ب ب س ن - ۲              |
|                     | + ن ب م        | + ب ب س          | + ب ب س ن - ۳              |
|                     |                | + ن ب م          | + ..... +                  |

4- ب- س

4 ن ب



س<sub>۱</sub> + ب<sub>۱</sub> = ۶  
 س<sub>۲</sub> + ب<sub>۱</sub> س<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> = ۶  
 س<sub>۳</sub> + ب<sub>۱</sub> س<sub>۲</sub> + ب<sub>۱</sub> س<sub>۱</sub> + ب<sub>۳</sub> = ۶  
 س<sub>۴</sub> + ب<sub>۱</sub> س<sub>۳</sub> + ب<sub>۲</sub> س<sub>۲</sub> + ب<sub>۱</sub> س<sub>۱</sub> + ب<sub>۴</sub> = ۶

$$s = s_{1-n} + s_{2-n} + \dots + s_{n-1} + s_n = s$$

پہلی مساوات سے ب، ب، ب، ب، ب، ب، ... کی رقوم میں س، معلوم ہوتا ہے کہ دوسری سے س، تیسری سے س، اور علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ س، معلوم ہو جاتا ہے۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں

$s_1 = -b_1 = s_2 - b_1^2 - b_2^2 + b_1 b_2 - b_3^2$   
 $s_2 = b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 + b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3$   
 $s_3 = -b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 - b_2 b_3$

یہ بتانے کے بعد کہ س، ا، س، ہ، س، م، ..... س، ن۔ کو کس طرح  
سروں کی رقوم میں محسوب کیا جاسکتا ہے ہم اب اپنے نتیجوں کی ایسی توسیع کرتے  
ہیں کہ اس سے اصلوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعے معلوم کئے جاسکیں۔ اس  
مقصد کے لئے ف (لا) کو لا آ-ن سے ضرب دو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ف}^{\text{ن}} (\text{لا}) = \text{لا}^{\text{م}} + \text{ب}^{\text{م}} \text{لا}^{\text{م}-1} + \text{ب}^{\text{م}} \text{لا}^{\text{م}-2} + \dots + \text{ب}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}-\text{م}}$$



اس مثال میں لا کو یکے بعد دیگرے عم، عم، عم، .....، عن میں بد لکر جمع کیا جائے تو

$$س + ب + س + ب + س + ب + ..... + ب + س = ۰$$

اب م کو یکے بعد دیگرے ن، ن + ۱، ن + ۲، ..... قیمتیں دینے سے اور س = ن کو پیش نظر رکھنے سے ہمیں اس آخری مساوات سے ذیل کے ربط ملے گا۔

$$س + ب + س + ب + س + ب + ..... + ب + س = ۰$$

$$س + ب + س + ب + س + ب + ..... + ب + س = ۰$$

$$س + ب + س + ب + س + ب + ..... + ب + س = ۰$$

پس اصولوں کی تمام مثبت قوتوں کے مجموعوں کو سروں کے منطق تفاعل سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ نیز دی ہوئی مساوات کو ایک ایسی مساوات میں تحویل کرنے سے جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں عم، عم، عم، .....، عن کے متکافی ہوں اور اوپر کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے اصولوں کی تمام معنی قوتوں کو بھی اسی طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

۷۸۔ مسئلہ ۲۔ کسی جبری مساوات کی اصولوں کے ہر منطق

متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں منطق طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس مسئلہ کو صرف صحیح تفاعل کے لئے ثابت کرنا کافی ہے کیونکہ کسی متشاکل تفاعل کو ایک واحد کسر میں تحویل کیا جاسکتا ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں صحیح متشاکل تفاعل ہوں۔ عم، عم، عم، .....، عن کا ہر صحیح تفاعل شکل ن عم ف ق عم ..... کی رقوم کا مجموعہ ہوتا ہے



جہاں ن ایک عددی مستقل ہے، اور اگر یہ تفاعل متشاکل ہو تو ہم اس کو شکل  
 ح ن ع ق ع ع... یعنی ن ح ع ع ع ع... میں لکھ سکتے  
 ہیں کیونکہ تمام رقمیں ایک ہی نمونہ کی ہوں گی۔ مسئلے اگر ہم یہ ثابت کر دیں کہ اس  
 مقدار کو سروں کی رقوم میں منطقی طور پر بیان کیا جاسکتا ہے تو مسئلہ ثابت ہو جاتا  
 ہے۔ پہلے ہم متشاکل تفاعل ح ع ق ع کی حسب ذیل قیمت ثابت کریں گے:-

ف ع = س س - س ف + ق ..... (۱)

اسکو ثابت کر نیکی لئے ہم سب اور سب کو باہم ضرب دیتے ہیں جہاں (68)

س ف = ع<sub>۱</sub> + ع<sub>۲</sub> + ع<sub>۳</sub> + ..... + ع<sub>۱۰</sub> + ع<sub>۱۱</sub>

$$\text{ساق} = \text{ق} + \text{عمر} + \text{ق} + \text{عمر} + \dots + \text{ق} + \text{عمر} + \text{ق}$$

جس سے

سین سق = عم<sub>۱</sub> + عم<sub>۲</sub> + ... + عم<sub>۱</sub> + عم<sub>۲</sub> + ... + عم<sub>۱</sub> + عم<sub>۲</sub> + ...

یا سب سب سب = سب سب + سب سب

جو دوہرے تفاعل  $\text{ح} \text{ع} \text{ع} \text{ق}$  کو واحد تفاعلوں  $\text{س} \text{س} \text{ق}$ ،  $\text{س} \text{ق} \text{ق}$  کی رقوم میں مندرجہ بالا شکل میں بیان کرتا ہے۔  
اب ہم تہرے تفاعل کے لئے اسی طرح کا جملہ ثابت کرتے ہیں یعنی

ف ق ع = س س س - س - س ف س - س + ق س + س + ق + ر

(P).....



۳  $\begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  اور س ر کو باہم ضرب دینے سے جہاں

$$۳ \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \dots$$

$$\text{س} = \begin{smallmatrix} \text{ع} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ع} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \dots + \begin{smallmatrix} \text{ع} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$$

ہیں تین مختلف حصوں پر مشتمل ایک جملہ ملتا ہے یعنی شکل ۳  $\begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  +  $\begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  ،

۳  $\begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  اور ۳  $\begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  کی رقمیں۔

$$\text{س} = \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \dots$$

جو ایسا ضابطہ ہے جو دو ہرے اور تہرے متشاکل تفاعلوں کو ملاتا ہے۔  
لیکن (۱) کی رو سے

$$۳ \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$$

$$۳ \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ف} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$$

$$۳ \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$$

ان قیمتوں کو درج کرنے سے تہرے تفاعل ۳  $\begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  مسلسل س س س س س س

کے واحد تفاعلوں کی رقوم میں مندرجہ بالا طریقہ پر بیان ہو سکتا ہے۔

اسی طرح چوہرے تفاعل ۳  $\begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$  کو تہرے تفاعل ۳  $\begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \text{ق} \\ \text{ع} \end{smallmatrix}$



(169)

پر منحصر کیا جاسکتا ہے اور بالآخر س، س، س، وغیرہ پر اور علیٰ ہذا القیاس۔  
یعنی آخر الامر اصولوں کا ہر منطق متشاکل تفاعل سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے،  
کیونکہ مسئلہ اسے س، س، س، س، وغیرہ سروں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں  
جب قوت نماؤں میں سے چند قوت نامساوی ہو جائیں تو ضابطوں  
(۱) اور (۲) میں ترمیم کرنی ہوگی۔

مثلاً اگر  $F = C \text{ تو } C = F$  اور  $C = F$  اور (۱) کی رقیں دو دو

کر کے مساوی ہوتی ہیں اس لئے  $C = F$  اور  $F = C$  جس سے

$$C = F = \frac{1}{2} (S_1 - S_2)$$

اسی طرح اگر  $C = F$  اور  $C = F$  میں  $F = C$  تو وہ چھ رقیں مساوی

ہوتی ہیں جو  $C = F$  اور  $C = F$  میں اصولوں کے تبادلہ سے حاصل ہوتی ہیں پس

$$C = F = \frac{1}{2 \times 2} (S_1 - S_2 - S_3 + S_4)$$

عام صورت میں اگر ت قوت نامساوی ہو جائیں تو ہر رقم  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times$   
ت مرتبہ تکرار پاتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$C = F = \frac{1}{2} (S_1 - S_2 - S_3 + S_4)$$

$$2 + S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 0$$



۲۔ ثابت کرو

$$۲۴ = ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۶ + ۶ + ۸ + ۸ + ۳ + ۳ + ۶ + ۶$$

۹۔ مسئلہ ۳۔ سروں ب، ب، ب، ب، ب، ب کی رقوم میں بیان کردہ س ر کی قیمت، ماکا سر ہے جو جملہ - ر لوک ماف (۱) کو ماکا صعودی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے۔  
چونکہ

$$لا + ب + لا + ب + لا + ب + ... = (لا - عم) (لا - عم) ... (لا - عم)$$

اس لئے اس میں لا کی بجائے ۱ رکھنے سے

$$۱ + ب + م + ب + م + ... = (۱ - عم م) (۱ - عم م) ... (۱ - عم م)$$

اب طرفین کا نیپیری لوکارتم لینے سے

(170)

|                     |                 |                 |                 |                 |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ب + م + ب + م + ... | ۱ + ب + م + ... | ۱ + ب + م + ... | ۱ + ب + م + ... | ۱ + ب + م + ... |
| - ۱/۲ ب             | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         |
| + ۱/۲ ب             | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         |
| + ۱/۲ ب             | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         |
| - ۱/۲ ب             | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         |
| - ۱/۲ ب             | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         | - ۱/۲ ب         |
| + ۱/۲ ب             | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         | + ۱/۲ ب         |



== ماس -  $\frac{1}{4}$  ماس -  $\frac{1}{3}$  ماس - ..... -  $\frac{1}{2}$  ماس - .....

اسلئے دونوں جملوں میں ماس کے سروں کو مساوی رکھنے سے

س = ر = ر بار

جہاں بار ماس کا سر ہے لوک ماس (  $\frac{1}{4}$  ) میں -

اوپر کی متشاكل مساوات سے یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ س ر میں ( ر دن )  
صرف س ر ب ، ب ، ب ، ب ، ..... ، ب ر ، شامل ہوتے ہیں اور اس لئے  
س ر کے جملہ کی شکل پراثر پڑے بغیر ب ر + ۱ ، ب ر + ۲ ، ..... ، ب ر  
کو معدوم کیا جاسکتا ہے -

۸۰۔ اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں سروں کو بیان کرنا -

چونکہ

۱ + ب + ماس + ب + ماس + ..... + بن ماس = (۱ - عم ماس) (۱ - عم ماس) ..... (۱ - عم ماس)

اسلئے

لوک ( ۱ + ب + ماس + ب + ماس + ..... + بن ماس ) = ماس -  $\frac{1}{4}$  ماس - ..... -  $\frac{1}{2}$  ماس - .....

اسلئے

۱ + ب + ماس + ب + ماس + ..... + بن ماس = ماس -  $\frac{1}{4}$  ماس - ..... -  $\frac{1}{2}$  ماس - .....

جو پھیلائے سے ہو جاتا ہے

(171)

|  |  |  |
|--|--|--|
| ۱- س ماس - $\frac{1}{4}$ س ماس                 | ماس - $\frac{1}{4}$ س ماس                      | ماس - $\frac{1}{4}$ س ماس                      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2}$ س ماس                            | $\frac{1}{2}$ س ماس                            | $\frac{1}{2}$ س ماس                            |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4}$ س ماس                            | $\frac{1}{4}$ س ماس                            | $\frac{1}{4}$ س ماس                            |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{8}$ س ماس                            | $\frac{1}{8}$ س ماس                            | $\frac{1}{8}$ س ماس                            |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{16}$ س ماس                           | $\frac{1}{16}$ س ماس                           | $\frac{1}{16}$ س ماس                           |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{32}$ س ماس                           | $\frac{1}{32}$ س ماس                           | $\frac{1}{32}$ س ماس                           |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{64}$ س ماس                           | $\frac{1}{64}$ س ماس                           | $\frac{1}{64}$ س ماس                           |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{128}$ س ماس                          | $\frac{1}{128}$ س ماس                          | $\frac{1}{128}$ س ماس                          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{256}$ س ماس                          | $\frac{1}{256}$ س ماس                          | $\frac{1}{256}$ س ماس                          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{512}$ س ماس                          | $\frac{1}{512}$ س ماس                          | $\frac{1}{512}$ س ماس                          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1024}$ س ماس                         | $\frac{1}{1024}$ س ماس                         | $\frac{1}{1024}$ س ماس                         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2048}$ س ماس                         | $\frac{1}{2048}$ س ماس                         | $\frac{1}{2048}$ س ماس                         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4096}$ س ماس                         | $\frac{1}{4096}$ س ماس                         | $\frac{1}{4096}$ س ماس                         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{8192}$ س ماس                         | $\frac{1}{8192}$ س ماس                         | $\frac{1}{8192}$ س ماس                         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{16384}$ س ماس                        | $\frac{1}{16384}$ س ماس                        | $\frac{1}{16384}$ س ماس                        |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{32768}$ س ماس                        | $\frac{1}{32768}$ س ماس                        | $\frac{1}{32768}$ س ماس                        |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{65536}$ س ماس                        | $\frac{1}{65536}$ س ماس                        | $\frac{1}{65536}$ س ماس                        |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{131072}$ س ماس                       | $\frac{1}{131072}$ س ماس                       | $\frac{1}{131072}$ س ماس                       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{262144}$ س ماس                       | $\frac{1}{262144}$ س ماس                       | $\frac{1}{262144}$ س ماس                       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{524288}$ س ماس                       | $\frac{1}{524288}$ س ماس                       | $\frac{1}{524288}$ س ماس                       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1048576}$ س ماس                      | $\frac{1}{1048576}$ س ماس                      | $\frac{1}{1048576}$ س ماس                      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2097152}$ س ماس                      | $\frac{1}{2097152}$ س ماس                      | $\frac{1}{2097152}$ س ماس                      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4194304}$ س ماس                      | $\frac{1}{4194304}$ س ماس                      | $\frac{1}{4194304}$ س ماس                      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{8388608}$ س ماس                      | $\frac{1}{8388608}$ س ماس                      | $\frac{1}{8388608}$ س ماس                      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{16777216}$ س ماس                     | $\frac{1}{16777216}$ س ماس                     | $\frac{1}{16777216}$ س ماس                     |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{33554432}$ س ماس                     | $\frac{1}{33554432}$ س ماس                     | $\frac{1}{33554432}$ س ماس                     |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{67108864}$ س ماس                     | $\frac{1}{67108864}$ س ماس                     | $\frac{1}{67108864}$ س ماس                     |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{134217728}$ س ماس                    | $\frac{1}{134217728}$ س ماس                    | $\frac{1}{134217728}$ س ماس                    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{268435456}$ س ماس                    | $\frac{1}{268435456}$ س ماس                    | $\frac{1}{268435456}$ س ماس                    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{536870912}$ س ماس                    | $\frac{1}{536870912}$ س ماس                    | $\frac{1}{536870912}$ س ماس                    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1073741824}$ س ماس                   | $\frac{1}{1073741824}$ س ماس                   | $\frac{1}{1073741824}$ س ماس                   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2147483648}$ س ماس                   | $\frac{1}{2147483648}$ س ماس                   | $\frac{1}{2147483648}$ س ماس                   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4294967296}$ س ماس                   | $\frac{1}{4294967296}$ س ماس                   | $\frac{1}{4294967296}$ س ماس                   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{8589934592}$ س ماس                   | $\frac{1}{8589934592}$ س ماس                   | $\frac{1}{8589934592}$ س ماس                   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{17179869184}$ س ماس                  | $\frac{1}{17179869184}$ س ماس                  | $\frac{1}{17179869184}$ س ماس                  |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{34359738368}$ س ماس                  | $\frac{1}{34359738368}$ س ماس                  | $\frac{1}{34359738368}$ س ماس                  |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{68719476736}$ س ماس                  | $\frac{1}{68719476736}$ س ماس                  | $\frac{1}{68719476736}$ س ماس                  |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{137438953472}$ س ماس                 | $\frac{1}{137438953472}$ س ماس                 | $\frac{1}{137438953472}$ س ماس                 |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{274877906944}$ س ماس                 | $\frac{1}{274877906944}$ س ماس                 | $\frac{1}{274877906944}$ س ماس                 |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{549755813888}$ س ماس                 | $\frac{1}{549755813888}$ س ماس                 | $\frac{1}{549755813888}$ س ماس                 |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1099511627776}$ س ماس                | $\frac{1}{1099511627776}$ س ماس                | $\frac{1}{1099511627776}$ س ماس                |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2199023255552}$ س ماس                | $\frac{1}{2199023255552}$ س ماس                | $\frac{1}{2199023255552}$ س ماس                |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4398046511104}$ س ماس                | $\frac{1}{4398046511104}$ س ماس                | $\frac{1}{4398046511104}$ س ماس                |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{8796093022208}$ س ماس                | $\frac{1}{8796093022208}$ س ماس                | $\frac{1}{8796093022208}$ س ماس                |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{17592186044416}$ س ماس               | $\frac{1}{17592186044416}$ س ماس               | $\frac{1}{17592186044416}$ س ماس               |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{35184372088832}$ س ماس               | $\frac{1}{35184372088832}$ س ماس               | $\frac{1}{35184372088832}$ س ماس               |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{70368744177664}$ س ماس               | $\frac{1}{70368744177664}$ س ماس               | $\frac{1}{70368744177664}$ س ماس               |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{140737488355328}$ س ماس              | $\frac{1}{140737488355328}$ س ماس              | $\frac{1}{140737488355328}$ س ماس              |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{281474976710656}$ س ماس              | $\frac{1}{281474976710656}$ س ماس              | $\frac{1}{281474976710656}$ س ماس              |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{562949953421312}$ س ماس              | $\frac{1}{562949953421312}$ س ماس              | $\frac{1}{562949953421312}$ س ماس              |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1125899906842624}$ س ماس             | $\frac{1}{1125899906842624}$ س ماس             | $\frac{1}{1125899906842624}$ س ماس             |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2251799813685248}$ س ماس             | $\frac{1}{2251799813685248}$ س ماس             | $\frac{1}{2251799813685248}$ س ماس             |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4503599627370496}$ س ماس             | $\frac{1}{4503599627370496}$ س ماس             | $\frac{1}{4503599627370496}$ س ماس             |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{9007199254740992}$ س ماس             | $\frac{1}{9007199254740992}$ س ماس             | $\frac{1}{9007199254740992}$ س ماس             |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{18014398509481984}$ س ماس            | $\frac{1}{18014398509481984}$ س ماس            | $\frac{1}{18014398509481984}$ س ماس            |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{36028797018963968}$ س ماس            | $\frac{1}{36028797018963968}$ س ماس            | $\frac{1}{36028797018963968}$ س ماس            |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{72057594037927936}$ س ماس            | $\frac{1}{72057594037927936}$ س ماس            | $\frac{1}{72057594037927936}$ س ماس            |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{144115188075855872}$ س ماس           | $\frac{1}{144115188075855872}$ س ماس           | $\frac{1}{144115188075855872}$ س ماس           |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{288230376151711744}$ س ماس           | $\frac{1}{288230376151711744}$ س ماس           | $\frac{1}{288230376151711744}$ س ماس           |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{576460752303423488}$ س ماس           | $\frac{1}{576460752303423488}$ س ماس           | $\frac{1}{576460752303423488}$ س ماس           |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1152921504606846976}$ س ماس          | $\frac{1}{1152921504606846976}$ س ماس          | $\frac{1}{1152921504606846976}$ س ماس          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2305843009213693952}$ س ماس          | $\frac{1}{2305843009213693952}$ س ماس          | $\frac{1}{2305843009213693952}$ س ماس          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4611686018427387904}$ س ماس          | $\frac{1}{4611686018427387904}$ س ماس          | $\frac{1}{4611686018427387904}$ س ماس          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{9223372036854775808}$ س ماس          | $\frac{1}{9223372036854775808}$ س ماس          | $\frac{1}{9223372036854775808}$ س ماس          |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{18446744073709551616}$ س ماس         | $\frac{1}{18446744073709551616}$ س ماس         | $\frac{1}{18446744073709551616}$ س ماس         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{36893488147419103232}$ س ماس         | $\frac{1}{36893488147419103232}$ س ماس         | $\frac{1}{36893488147419103232}$ س ماس         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{73786976294838206464}$ س ماس         | $\frac{1}{73786976294838206464}$ س ماس         | $\frac{1}{73786976294838206464}$ س ماس         |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{147573952589676412928}$ س ماس        | $\frac{1}{147573952589676412928}$ س ماس        | $\frac{1}{147573952589676412928}$ س ماس        |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{295147905179352825856}$ س ماس        | $\frac{1}{295147905179352825856}$ س ماس        | $\frac{1}{295147905179352825856}$ س ماس        |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{590295810358705651712}$ س ماس        | $\frac{1}{590295810358705651712}$ س ماس        | $\frac{1}{590295810358705651712}$ س ماس        |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1180591620717411303424}$ س ماس       | $\frac{1}{1180591620717411303424}$ س ماس       | $\frac{1}{1180591620717411303424}$ س ماس       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2361183241434822606848}$ س ماس       | $\frac{1}{2361183241434822606848}$ س ماس       | $\frac{1}{2361183241434822606848}$ س ماس       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4722366482869645213696}$ س ماس       | $\frac{1}{4722366482869645213696}$ س ماس       | $\frac{1}{4722366482869645213696}$ س ماس       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{9444732965739290427392}$ س ماس       | $\frac{1}{9444732965739290427392}$ س ماس       | $\frac{1}{9444732965739290427392}$ س ماس       |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{18889465931478580854784}$ س ماس      | $\frac{1}{18889465931478580854784}$ س ماس      | $\frac{1}{18889465931478580854784}$ س ماس      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{37778931862957161709568}$ س ماس      | $\frac{1}{37778931862957161709568}$ س ماس      | $\frac{1}{37778931862957161709568}$ س ماس      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{75557863725914323419136}$ س ماس      | $\frac{1}{75557863725914323419136}$ س ماس      | $\frac{1}{75557863725914323419136}$ س ماس      |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{151115727451828646838272}$ س ماس     | $\frac{1}{151115727451828646838272}$ س ماس     | $\frac{1}{151115727451828646838272}$ س ماس     |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{302231454903657293676544}$ س ماس     | $\frac{1}{302231454903657293676544}$ س ماس     | $\frac{1}{302231454903657293676544}$ س ماس     |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{604462909807314587353088}$ س ماس     | $\frac{1}{604462909807314587353088}$ س ماس     | $\frac{1}{604462909807314587353088}$ س ماس     |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1208925819614629174706176}$ س ماس    | $\frac{1}{1208925819614629174706176}$ س ماس    | $\frac{1}{1208925819614629174706176}$ س ماس    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2417851639229258349412352}$ س ماس    | $\frac{1}{2417851639229258349412352}$ س ماس    | $\frac{1}{2417851639229258349412352}$ س ماس    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4835703278458516698824704}$ س ماس    | $\frac{1}{4835703278458516698824704}$ س ماس    | $\frac{1}{4835703278458516698824704}$ س ماس    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{9671406556917033397649408}$ س ماس    | $\frac{1}{9671406556917033397649408}$ س ماس    | $\frac{1}{9671406556917033397649408}$ س ماس    |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{19342813113834066795298816}$ س ماس   | $\frac{1}{19342813113834066795298816}$ س ماس   | $\frac{1}{19342813113834066795298816}$ س ماس   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{38685626227668133590597632}$ س ماس   | $\frac{1}{38685626227668133590597632}$ س ماس   | $\frac{1}{38685626227668133590597632}$ س ماس   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{77371252455336267181195264}$ س ماس   | $\frac{1}{77371252455336267181195264}$ س ماس   | $\frac{1}{77371252455336267181195264}$ س ماس   |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{154742504910672534362390528}$ س ماس  | $\frac{1}{154742504910672534362390528}$ س ماس  | $\frac{1}{154742504910672534362390528}$ س ماس  |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{309485009821345068724781056}$ س ماس  | $\frac{1}{309485009821345068724781056}$ س ماس  | $\frac{1}{309485009821345068724781056}$ س ماس  |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{618970019642690137449562112}$ س ماس  | $\frac{1}{618970019642690137449562112}$ س ماس  | $\frac{1}{618970019642690137449562112}$ س ماس  |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{1237940039285380274899124224}$ س ماس | $\frac{1}{1237940039285380274899124224}$ س ماس | $\frac{1}{1237940039285380274899124224}$ س ماس |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{2475880078570760549798248448}$ س ماس | $\frac{1}{2475880078570760549798248448}$ س ماس | $\frac{1}{2475880078570760549798248448}$ س ماس |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{4951760157141521099596496896}$ س ماس | $\frac{1}{4951760157141521099596496896}$ س ماس | $\frac{1}{4951760157141521099596496896}$ س ماس |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{9903520314283042199192993792}$ س ماس | $\frac{1}{9903520314283042199192993792}$ س ماس | $\frac{1}{9903520314283042199192993792}$ س ماس |
| $+$  | $+$  | $+$  |
| $\frac{1}{19$                                  |  |  |



اب ما کی مختلف قوتوں کا مقابلہ کرنے سے ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب کی قیمتیں س، ا، س، س، س، س، س، س، س، س کی رقوم میں معلوم ہو جاتی ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ب میں س کے بعد کی قوتوں کا کوئی مجموعہ شامل نہیں ہوتا۔

اگر متبادلہ (۱) کو ما کے لحاظ سے تفرق کیا جائے تو حاصل ہو نیوالی متبادلہ مساوات سے دفعہ ۷ کی وہ مساواتیں اخذ کی جاسکتی ہیں جو سروں اور قوتوں کے مجموعوں کو مربوط کرتی ہیں۔

اس امر کا مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ اصولوں کے کسی متشاکل تفاعل کو سروں کی رقوم میں یا کسی سر کو اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں بیان کرنیکا مسئلہ کامل طور پر معین ہے کیونکہ ہر صورت میں صرف ایک حل حاصل ہوتا ہے۔

آئندہ کسی باب میں سروں کی رقوم میں س م کے لئے اور اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کی رقوم میں ب م کے لئے عام جملے دئے جائیں گے جو ویرنگ (Waring) سے منسوب ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ف (ع۱) + ف (ع۲) + ..... + ف (ع۱۰) کی قیمت معلوم کرو جہاں ف (لا) = کی اصلیں ع۱، ع۲، ع۳، .....، ع۱۰ ہیں اور ف (لا) لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہے۔

ہمیں معلوم ہے

$$\begin{aligned} \frac{ف (لا)}{ف (لا)} &= \frac{1}{لا - ع۱} + \frac{1}{لا - ع۲} + \frac{1}{لا - ع۳} + \frac{1}{لا - ع۱۰} \\ \text{اور} \quad \frac{ف (لا) ف (لا)}{ف (لا)} &= \frac{ف (لا)}{لا - ع۱} + \frac{ف (لا)}{لا - ع۲} + \frac{ف (لا)}{لا - ع۳} + \frac{ف (لا)}{لا - ع۱۰} \end{aligned}$$



(172) تقسیم کی تکمیل کرنے سے اور اس مساوات کی طرفین میں صرف باقیوں کو برقرار رکھنے سے

$$\frac{r_1 - n_1}{f_1 - e_1} + \dots + \frac{r_n - n_n}{f_n - e_n} = \frac{r - n}{f - e}$$

جس سے

$$r_1 - n_1 + r_2 - n_2 + \dots + r_n - n_n = \frac{r - n}{f - e} (f_1 - e_1 + f_2 - e_2 + \dots + f_n - e_n)$$

اور اس مساوات کی طرفین میں  $r_1 - n_1$  کے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$r = \frac{r - n}{f - e} (f_1 - e_1)$$

۲۔ ثابت کرو کہ س، اس خارج قسمت میں  $\frac{r_1 - n_1}{f_1 - e_1}$  کا سر ہے جو  $f_1 - e_1$  کو

$f - e$  سے تقسیم کرنے سے اور لا کی منفی قوتوں کی بموجب ترتیب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ س، اسی خارج قسمت میں  $r_1 - n_1$  کا سر (بہ تبدیل علامت)

ہے جب اسکو لا کی مثبت قوتوں کی بموجب ترتیب دیا جاتا ہے۔

۴۔ اگر  $f - e$  کا درجہ  $n - 2$  سے متجاوز نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{r - n}{f - e} = \frac{r_1 - n_1}{f_1 - e_1}$$

جہاں  $\frac{r - n}{f - e}$  سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو  $r - n$  سے  $n$  تک (بشمول ہر دو اعداد)

تمام قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{r_1 - n_1}{f_1 - e_1} + \dots + \frac{r_n - n_n}{f_n - e_n} = \frac{r - n}{f - e}$$

جزوی کسور سے



اور ف (لا) سے ضرب چلیپائی دینے اور یکے بعد دیگرے لا = عم، عم... رکھنے سے  

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (لا)}{ف (لا)} + \frac{ف (لا)}{ف (لا)} + \dots + \frac{ف (لا)}{ف (لا)}$$
 جس سے

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (لا)}{ف (لا)} + \frac{ف (لا)}{ف (لا)} + \dots + \frac{ف (لا)}{ف (لا)}$$

جب ف (لا) کا درجہ ن - ۲ ہو تو مساوات کی دائیں جانب کو  $\frac{۱}{۱}$  کے  
 تفاعل کے طور پر بیان کرنے سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کوئی رقم ایسی نہیں ہے جس میں  
 $\frac{۱}{۱}$  جزو ضربی کے طور پر نہ آتا ہو۔ اس لئے سروں کا مقابلہ کرنے سے

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \dots$$

چونکہ ف کوئی منطوق صحیح تفاعل ہو سکتا ہے جس کا درجہ ن - ۲ سے  
 متجاوز نہ کرے اسلئے ہمیں ذیل کی مخصوص صورتیں ملتی ہیں جو خاص توجہ کے  
 قابل ہیں:۔

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \dots = \frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (لا)}{ف (لا)}$$

۵۔ اگر ن متغیروں لا، لا، لا، ...، لا کے درمیان ذیل کی ن - ۲ مساواتیں

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \dots = \frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (لا)}{ف (لا)}$$

دیجائیں تو ان ن متغیروں کو دو نئے متغیروں لا، لا کی رقم میں بیان کرو۔

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \dots = \frac{ف (لا)}{ف (لا)}$$

۸۔ متشاکل تفاعلوں کا رتبہ اور وزن۔ اصولوں کے متشاکل  
 تفاعل کی کسی رقم میں سب اصولوں کی قوتوں کے مجموعہ کو ہم اس تفاعل کا



وزن کہنگے (دیکھو دفعہ ۲۸) اور وہ بڑی سے بڑی قوت جسمیں ہر اصل تفاعل کے اندر داخل ہوتی ہے تفاعل کا رتبہ کہلائیگی۔ مثلاً  $ح$   $عہ$   $بہ$   $جہ$  کا وزن چھ اور اس کا رتبہ تین ہے۔ یہ ثابت کر دیا گیا ہے (دفعہ ۲۸) کہ اصلوں کسی متشاکل تفاعل کی قیمت میں (جو سروں کی رقوم میں بیان کی گئی ہو) ہر رقم کے لاحقوں کا مجموعہ تفاعل کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔ اب ہم متشاکل تفاعلوں سے متعلق دوسرا مسئلہ ثابت کرتے ہیں یعنی:-

کسی متشاکل تفاعل کی قیمت سروں  $ب$ ،  $بہ$ ،  $بہہ$ ،  $بہہہ$  کی رقوم میں معلوم کیجائے تو اس جملہ کا درجہ متشاکل تفاعل کے رتبہ کے مساوی ہوتا ہے اس کو دفعہ ۲۳ کی مساداتوں سے آسانی کے ساتھ اخذ کیا جاسکتا ہے کیونکہ اصلوں کی رقوم میں ہر ایک سر کی قیمت میں کوئی اصل صرف پہلی قوت میں شامل ہوتی ہے اور اس لئے سروں میں بڑے سے بڑا درجہ وہی ہوگا جو کسی ایک اصل کے متناظر متشاکل تفاعل کا ہے۔ مثلاً  $ح$   $عہ$   $بہ$  کی قیمت  $بہہ$  -  $بہ$   $بہہ$   $بہہہ$  ہے۔ سروں کے اس تفاعل کا

درجہ دو ہے اور یہ وہی ہے جو متشاکل تفاعل کا رتبہ ہے۔

چونکہ مندرجہ بالا مسئلہ اہم ہے اس لئے ہم اس کا ایک دوسرا ثبوت بھی دیتے ہیں جسمیں  $ب$  کی کسی مناسب قوت سے متشاکل تفاعل کو ضرب دینے سے اس کو سروں  $ب$ ،  $بہ$ ،  $بہہ$ ،  $بہہہ$  کے ایک متجانس صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے چنانچہ تفاعل آئیو الے اطلاقات میں عموماً اسی شکل میں نظر آئیگا۔

سروں

$ب$ ،  $بہ$ ،  $بہہ$ ،  $بہہہ$ ،  $بہہہہ$ ،  $بہہہہہ$

کی جگہ  $\frac{ب}{بہ}$ ،  $\frac{بہ}{بہہ}$ ،  $\frac{بہہ}{بہہہ}$ ،  $\frac{بہہہ}{بہہہہ}$ ،  $\frac{بہہہہ}{بہہہہہ}$  رکھو۔



اب اگر فہ (عم، عم، ...، عن) سے اصولوں کا کوئی منطق صحیح متشاکل تفاعل تعبیر ہو تو

$$فہ (عم، عم، ...، عن) = ف (د، د، ...، د)$$

جہاں تفاعل ف (د، د، ...، د) کا درجہ سروں میں ۵ ہے اور یہ تفاعل سروں کا ایک متجاش صحیح تفاعل ہے جو د سے تقسیم نہیں ہوتا۔ ہمیں ثابت یہ کرنا ہے کہ فہ کا درجہ ۵ ہے۔ اس مقصد کے لئے

اصول کو ان کے متکافوں میں بدل دو اور اسلئے د، د، ...، د کو د، د، ...، د میں پس

$$فہ (عم، عم، ...، عن) = ف (د، د، ...، د)$$

نیز

$$فہ (عم، عم، ...، عن) = \frac{سا (عم، عم، ...، عن)}{(عم، عم، ...، عن) پ}$$

جہاں فہ کا درجہ پ ہے اور سا ایک صحیح تفاعل ہے جو تمام اصولوں کے حاصل ضرب سے تقسیم نہیں ہوتا اور (عم، عم، ...، عن) تمام رقموں کے نسب تاؤں کا کم سے کم مشترک جزو ضربی ہے۔ (۱) میں درج کرنے سے

$$سا (عم، عم، ...، عن) = ف (د، د، ...، د) پ$$

اس مساوات سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ، ہ کے مساوی ہے کیونکہ

اگر پ، ہ سے بڑا ہوتا تو سا (عم، عم، ...، عن) حاصل ضرب عم، عم، ...، عن سے



۸۲۔ اصولوں کے متشاکل تفاعل کو محسوب کرنا۔ کسی منطبق متشاکل تفاعل کو دفعہ ۸ کے مسئلہ کی مدد سے محسوب کیا جاسکتا ہے اگرچہ عملاً دوسرے طریقے بالعموم زیادہ سہولت بخش ہوتے ہیں جیسا کہ اس دفعہ کے آخر میں جو مثالیں دی گئی ہیں ان سے واضح ہوگا۔ ہم جلد دوم میں جہاں اس مضمون پر مزید بحث کی جائے گی یہ بھی بتائینگے کہ متشاکل تفاعلوں کے محسوب کرنے میں اکثر اوقات ان طریقوں کو استعمال کرنے سے سہولت پیدا ہوتی ہے جو وہاں ثابت کئے ہوئے اصولوں پر مبنی ہیں۔

اصلوں کے کسی متشاکل تفاعل میں رقموں کی تعداد آسانی کے ساتھ معلوم کی جا سکتی ہے۔ مثلاً  $n$  ویں درجہ کی مساوات کے جملہ  $3$   $2$   $1$   $0$   $-1$   $-2$   $-3$   $-4$   $-5$   $-6$   $-7$   $-8$   $-9$   $-10$   $-11$   $-12$   $-13$   $-14$   $-15$   $-16$   $-17$   $-18$   $-19$   $-20$   $-21$   $-22$   $-23$   $-24$   $-25$   $-26$   $-27$   $-28$   $-29$   $-30$   $-31$   $-32$   $-33$   $-34$   $-35$   $-36$   $-37$   $-38$   $-39$   $-40$   $-41$   $-42$   $-43$   $-44$   $-45$   $-46$   $-47$   $-48$   $-49$   $-50$   $-51$   $-52$   $-53$   $-54$   $-55$   $-56$   $-57$   $-58$   $-59$   $-60$   $-61$   $-62$   $-63$   $-64$   $-65$   $-66$   $-67$   $-68$   $-69$   $-70$   $-71$   $-72$   $-73$   $-74$   $-75$   $-76$   $-77$   $-78$   $-79$   $-80$   $-81$   $-82$   $-83$   $-84$   $-85$   $-86$   $-87$   $-88$   $-89$   $-90$   $-91$   $-92$   $-93$   $-94$   $-95$   $-96$   $-97$   $-98$   $-99$   $-100$   $-101$   $-102$   $-103$   $-104$   $-105$   $-106$   $-107$   $-108$   $-109$   $-110$   $-111$   $-112$   $-113$   $-114$   $-115$   $-116$   $-117$   $-118$   $-119$   $-120$   $-121$   $-122$   $-123$   $-124$   $-125$   $-126$   $-127$   $-128$   $-129$   $-130$   $-131$   $-132$   $-133$   $-134$   $-135$   $-136$   $-137$   $-138$   $-139$   $-140$   $-141$   $-142$   $-143$   $-144$   $-145$   $-146$   $-147$   $-148$   $-149$   $-150$   $-151$   $-152$   $-153$   $-154$   $-155$   $-156$   $-157$   $-158$   $-159$   $-160$   $-161$   $-162$   $-163$   $-164$   $-165$   $-166$   $-167$   $-168$   $-169$   $-170$   $-171$   $-172$   $-173$   $-174$   $-175$   $-176$   $-177$   $-178$   $-179$   $-180$   $-181$   $-182$   $-183$   $-184$   $-185$   $-186$   $-187$   $-188$   $-189$   $-190$   $-191$   $-192$   $-193$   $-194$   $-195$   $-196$   $-197$   $-198$   $-199$   $-200$   $-201$   $-202$   $-203$   $-204$   $-205$   $-206$   $-207$   $-208$   $-209$   $-210$   $-211$   $-212$   $-213$   $-214$   $-215$   $-216$   $-217$   $-218$   $-219$   $-220$   $-221$   $-222$   $-223$   $-224$   $-225$   $-226$   $-227$   $-228$   $-229$   $-230$   $-231$   $-232$   $-233$   $-234$   $-235$   $-236$   $-237$   $-238$   $-239$   $-240$   $-241$   $-242$   $-243$   $-244$   $-245$   $-246$   $-247$   $-248$   $-249$   $-250$   $-251$   $-252$   $-253$   $-254$   $-255$   $-256$   $-257$   $-258$   $-259$   $-260$   $-261$   $-262$   $-263$   $-264$   $-265$   $-266$   $-267$   $-268$   $-269$   $-270$   $-271$   $-272$   $-273$   $-274$   $-275$   $-276$   $-277$   $-278$   $-279$   $-280$   $-281$   $-282$   $-283$   $-284$   $-285$   $-286$   $-287$   $-288$   $-289$   $-290$   $-291$   $-292$   $-293$   $-294$   $-295$   $-296$   $-297$   $-298$   $-299$   $-300$   $-301$   $-302$   $-303$   $-304$   $-305$   $-306$   $-307$   $-308$   $-309$   $-310$   $-311$   $-312$   $-313$   $-314$   $-315$   $-316$   $-317$   $-318$   $-319$   $-320$   $-321$   $-322$   $-323$   $-324$   $-325$   $-326$   $-327$   $-328$   $-329$   $-330$   $-331$   $-332$   $-333$   $-334$   $-335$   $-336$   $-337$   $-338$   $-339$   $-340$   $-341$   $-342$   $-343$   $-344$   $-345$   $-346$   $-347$   $-348$   $-349$   $-350$   $-351$   $-352$   $-353$   $-354$   $-355$   $-356$   $-357$   $-358$   $-359$   $-360$   $-361$   $-362$   $-363$   $-364$   $-365$   $-366$   $-367$   $-368$   $-369$   $-370$   $-371$   $-372$   $-373$   $-374$   $-375$   $-376$   $-377$   $-378$   $-379$   $-380$   $-381$   $-382$   $-383$   $-384$   $-385$   $-386$   $-387$   $-388$   $-389$   $-390$   $-391$   $-392$   $-393$   $-394$   $-395$   $-396$   $-397$   $-398$   $-399$   $-400$   $-401$   $-402$   $-403$   $-404$   $-405$   $-406$   $-407$   $-408$   $-409$   $-410$   $-411$   $-412$   $-413$   $-414$   $-415$   $-416$   $-417$   $-418$   $-419$   $-420$   $-421$   $-422$   $-423$   $-424$   $-425$   $-426$   $-427$   $-428$   $-429$   $-430$   $-431$   $-432$   $-433$   $-434$   $-435$   $-436$   $-437$   $-438$   $-439$   $-440$   $-441$   $-442$   $-443$   $-444$   $-445$   $-446$   $-447$   $-448$   $-449$   $-450$   $-451$   $-452$   $-453$   $-454$   $-455$   $-456$   $-457$   $-458$   $-4$

رقموں کی تعداد (ن-۱) (ن-۲) ہے۔ یہ فی الحقیقت ن چیزوں کے ترتیبوں کی تعداد ہے جب انہیں سے تین تین کو اکٹھا لیا جائے۔ اگر کسی رقم میں اصلوں کے قوت ناماسب کے سب مختلف نہ ہوں تو رقوموں کی تعداد گھٹ جائیگی۔ مثلاً چار درجہ کے لئے ح ع<sup>۲</sup> بہ جہ میں چوبیس کی بجائے صرف بارہ رقوم شامل ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۶ صفحہ ۶۶)۔ اسکی وجہ یہ ہے کہ ح ع<sup>۲</sup> بہ جہ میں دو ترتیبوں عہ بہ جہ، عہ جہ بہ سے صرف ایک رستم ملتی ہے یعنی عہ<sup>۲</sup> بہ جہ۔ طالب علم اگر ترتیبوں کے نظریہ سے واقف ہے تو اسکو کسی مخصوص صورت میں اس رستم کی تخفیف کرنے میں کوئی مشکل پیش آئیگی۔ جب اصلوں کے دو قوت نامساوی ہوں تو اس تعداد کو  $۱ \times ۲$  سے تقسیم کرنا ہوگا جو اس فرض کی بناء پر حاصل ہوتی ہے کہ تمام قوت نامختلف ہیں۔ جب تین قوت نامساوی ہوں تو اس تعداد کو  $۱ \times ۲ \times ۳$  سے تقسیم کرنا ہوگا اور علیٰ ہذا القیاس۔ عام صورت میں ن ویں درجہ کی مساوات کے جملہ



۳ عم عم عم ..... میں رقموں کی تعداد ہوگی

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}$$

جہاں  $m$  سے ہر رقم میں اصولوں کی تعداد اور  $n$  سے مساوی قوت نماؤں کی تعداد تعبیر ہوتی ہے۔

جب اصولوں کے متشاکل تفاعل میں داخل ہونے والی بڑی سے بڑی قوت ایک چھوٹا عدد ہو یعنی جب تفاعل کا رتبہ چھوٹا ہو (دیکھو دفعہ ۸۱) تو متشاکل تفاعل کو محسوب کرنے کے لئے دفعہ ۲۷ میں بیان کردہ طریقے استعمال کرنا مفید ہوگا۔

یہ مشاہدہ کرنا ضروری ہے کہ جب کسی متشاکل تفاعل کو جس کا درجہ تمام اصولوں میں (یعنی اس کا وزن)  $n$  ہو  $n$  ویں درجہ کی مساوات کے لئے سروں  $b, b, b, \dots, b$  کی رقوم میں محسوب کیا جاتا ہے تو اسکی قیمت کسی اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کے لئے (جب عددی سر سب کے سب ایک کے مساوی ہوں) وہی ہوتی ہے کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ  $b$  کے بعد کا کوئی سر اس قیمت میں داخل نہیں ہو سکتا اور دفعہ ۷ کی مساواتیں جنکے ذریعہ ہم فرق کرتے ہیں کہ قیمت محسوب کی گئی ہے وہی شکل رکھتی ہیں خواہ مساوات  $n$  ویں درجہ کی ہو یا اس سے بڑے درجہ کی۔ یہ بھی واضح ہے کہ اس متشاکل تفاعل کی قیمت  $m$  درجہ کی مساوات کیلئے (جبکہ  $m > n$ ) حاصل ہو سکتی ہے اگر  $n$  ویں درجہ کی مساوات کے لئے اس متشاکل تفاعل کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اس میں  $b, b, \dots, b$

(176)

.....  $b$  سب کو صفر کے مساوی رکھا جائے کیونکہ کمتر درجہ کی مساوات

کو  $n$  ویں درجہ کی مساوات سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے کہ  $b$  کے بعد آئیوں والے تمام سروں کو صفر کے مساوی رکھ دیا جائے۔ اور اسی طرح







لیکن اس صورت میں ظاہر ہے کہ پہلا طریقہ بہت زیادہ آسان ہے کیونکہ اس میں  
وغیرہ کی قیمتوں سے بہت سی ایسی رقمیں داخل ہوتی ہیں جو ایک دوسرے کو  
زائل کرتی ہیں۔

۲۔  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

یہاں  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کا مربع لینے سے

$$\text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ع}^2 \text{ع}^2$$

مربع لینے میں یہ ظاہر ہے کہ رقم  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کو  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  سے  
یا  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کو  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  سے یا  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کو  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی  
پس نتیجہ میں  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کا سرچھہ ہوگا کیونکہ مربع میں ہر حاصل ضرب دو مرتبہ  
واقع ہوتا ہے۔ اس مثال اور مثال ۸ دفعہ ۲ میں صرف یہ فرق ہے کہ رقم  
 $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کے قبل  $\text{ع}^2$  ہے۔ اس لئے بالآخر

$$\text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ع}^2 \text{ع}^2 - \text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2$$

۳۔  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔  
مثال ۹ دفعہ ۲ کی طرح یہاں

$$\text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2$$

اس لئے گذشتہ نتیجوں کو استعمال کرنے سے

$$\text{ع}^2 \text{ع}^2 = \text{ع}^2 \text{ع}^2 - \text{ع}^2 \text{ع}^2 + \text{ع}^2 \text{ع}^2$$

۴۔  $\text{ع}^2 \text{ع}^2$  کو عام مساوات کے لئے محسوب کرو۔

نتیجہ وہی ہوگا جو پانچویں درجہ کی مساوات کے لئے حساب لگانے میں ہوتا۔



اس متشاکل تفاعل کو حاصل کرنے کے لئے ہم ۳ عدم ۲ عدم اور ۳ عدم ۱ عدم کو باہم ضرب دیتے ہیں اور یہ دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنہیں پانچ اصلوں میں شامل ہوں۔ رقم ۵ عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم صرف ایک مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ پیدا ہو سکتی ہے صرف عدم ۲ عدم کو عدم ۱ عدم ۲ عدم سے ضرب دینے سے۔ نمونہ عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم کی رقمیں، انہیں سے ہر ایک، تین مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ رقم عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم پیدا ہوگی عدم کو عدم ۱ عدم ۲ عدم سے یا عدم ۲ عدم ۲ عدم کو عدم ۱ عدم سے ضرب دینے سے اور کسی اور طرح پیدا نہیں ہو سکتی۔ رقم عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم دس مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ اصولوں کے کسی زوج کو دوسری تین اصلوں سے ضرب دینے سے پیدا ہوگی اور پانچ اصلوں میں سے دو دو کے اجتماعوں کی تعداد دس ہے۔ اسلئے عام مساوات کے لئے

$$3 عدم ۲ عدم ۲ عدم = 3 عدم ۲ عدم + 3 عدم ۲ عدم ۱ عدم$$

$$10 عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم$$

[ن = ۵ کے لئے ہم اس مساوات کی تصدیق بالکل ایسے ہی کر سکتے ہیں

جیسے مثال ۹ دفعہ ۲ میں۔ کیونکہ دو اجزائے ضربی کے حاصل ضرب میں جبکہ ہر جزو ضربی میں دس رقمیں ہوں ۱۰۰ رقمیں ہونگی یعنی عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم کے نمونہ کی ۳۰ رقمیں عدم ۲ عدم ۲ عدم کے نمونہ کی ۲۰ رقمیں لیکن انہیں سے ہر ایک تین مرتبہ اور

رقم عدم ۲ عدم ۲ عدم ۱ عدم ۱۰ مرتبہ۔]

اس طرح مطلوبہ متشاکل تفاعل کو محسوب کر نہیں ۳ عدم ۲ عدم ۲ عدم کو



محسوب کرنا پڑیگا جس کے لئے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 = 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 + 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5$$

پس بالآخر ہم حاصل کرتے ہیں

$$3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 = 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 + 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 - 5 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5$$

دفعہ ۸ کے طریقہ میں اس کو محسوب کرنا پڑیگا اور اس سے اس کی قیمتوں سے بہت سی رقمیں داخل ہونگی جو نتیجہ میں خارج ہونگی۔

$$5 - 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 \text{ کی قیمت عام مساوات کے لئے معلوم کرو۔}$$

ہم 3 عم 1 عم 2 کو 3 عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے ضرب دیتے ہیں اور

دیکھتے ہیں کہ کس نمونہ کی رقمیں پیدا ہوتی ہیں جنہیں چھ اصلیں عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 شامل ہوں۔

رقم عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 صرف ایک مرتبہ واقع ہو سکتی ہے نمونہ عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5

کی رقموں میں سے ہر ایک چار مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ یہ رقم پیدا ہوتی ہے عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے

سے عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 سے ضرب دینے سے۔ رقم عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5

پندرہ مرتبہ واقع ہوگی کیونکہ چھ اصولوں میں سے دو کے اجتماعوں کی تعداد ۱۵ ہے

(178)

$$3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 = 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5 + 3 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5$$

$$+ 15 \text{ عم} 1 \text{ عم} 2 \text{ عم} 3 \text{ عم} 4 \text{ عم} 5$$

پھر 3 عم 1 عم 2 عم 3 عم 4 عم 5 کو محسوب کرنے کے لئے



$$3 \text{ عم } 3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 = 3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

$$4 + 3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

پس بالآخر

$$3 \text{ عم } 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 = 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 - 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 + 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

۶۔ عام مساوات کے سروں کی رقوم میں 3 عم 1 عم 2 عم 2 کی قیمت معلوم کرو  
3 عم 1 عم 2 عم 2 کا مربع لینے سے

$$3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 = 3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 + 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

$$4 + 3 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 + 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

جس سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$3 \text{ عم } 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 = 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 - 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 + 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

۸۳۔ متجانس حاصل ضرب۔ عام طور پر ن مقداروں عم عم...

... عن کے وہ متشاکل تفاعل جنکا وزن ایک ہی ہو متعدد ہوتے ہیں اور انہیں دو یا زیادہ وہ تفاعل بھی شریک کئے جاسکتے ہیں جن کا رتبہ اور وزن دونوں ایک ہی ہوں۔ مثلاً کسی ن حروف میں سے مندرجہ ذیل متشاکل تفاعل بنائے جاسکتے ہیں جنکا وزن چار ہے :-

$$3 \text{ عم } 2 \text{ عم } 1 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2 \text{ عم } 2$$

وزن کے تمام ایسے متشاکل تفاعلوں کے مجموعہ کو ہم ن حروف کا "رابعاً" کے متجانس حاصل ضربوں کا مجموعہ کہیں گے اور اس مجموعہ کو II سے تعبیر کریں گے یہ دیکھنا آسان ہے کہ II ن اجزائے ضربی کے حسب ذیل حاصل ضرب ہیں



لا کا سر ہے :-

$$(1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots) (1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots) \dots (1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots)$$

ذیل میں جو مثالیں دی گئی ہیں انہیں نہایت اہم بنیادی مسئلے شامل ہیں جو متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں اور اس مساوات کے سروں میں تعلق ظاہر کرتے ہیں جس کی اصلیں  $ع_1, ع_2, ع_3, \dots$   $ع_1, ع_2, ع_3, \dots$  ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو

$$\prod_{r=1}^n \frac{ع_r + 1}{ع_r} = \frac{ع_n + 1}{ع_1}$$

چونکہ

$$\frac{1}{ع_1} = \frac{1}{ع_1} \cdot \frac{ع_2 + 1}{ع_2} \cdot \frac{ع_3 + 1}{ع_3} \dots \frac{ع_n + 1}{ع_n} = \frac{ع_n + 1}{ع_1}$$

$$= (1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots) (1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots) \dots (1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots)$$

$$= 1 + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots + ع_n لا^n + \dots + ع_1 لا + ع_2 لا^2 + \dots + ع_n لا^n + \dots$$

$$\frac{1}{ع_1} \times \frac{ع_n + 1}{ع_n} = \frac{ع_n + 1}{ع_1} \quad \text{اور}$$

(179)

$$\frac{ع_n + 1}{ع_1} = \frac{ع_n + 1}{ع_1} \times \frac{ع_n + 1}{ع_n} = \frac{ع_n + 1}{ع_1} \quad \text{اسلئے}$$

(۱) اور (۲) میں  $ع_1$  کے سروں کا مقابلہ کرو تو مطلوبہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

۲۔ اصولوں کے متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں کو مساوات کے سروں کی رقوم میں بیان کرو اور بالعکس۔

چونکہ



(۱-ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>) (۱-ع<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub>) ... (۱-ع<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub>) = ۱ + ب<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub> + ۱  
اسلئے مثال ماسبق سے

$$(۱ + ب<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub>) (۱ + ب<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub>) = ۱$$

جس سے

$$ب<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> = ۰، ب<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub> = ۰، ب<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ب<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ب<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub> = ۰$$

ان مساواتوں سے (جنہیں ب<sub>۱</sub>، ب<sub>۲</sub>، وغیرہ اور م<sub>۱</sub>، م<sub>۲</sub>، وغیرہ کا  
آپس میں تبادلہ ہو سکتا ہے) ب<sub>۱</sub>، ب<sub>۲</sub>، ب<sub>۳</sub>، ... ب<sub>ن</sub> کو م<sub>۱</sub>، م<sub>۲</sub>، م<sub>۳</sub>، ... م<sub>ن</sub> کی رقوم

میں بیان کیا جاسکتا ہے اور بالعکس -  
اس مثال اور مثال ماسبق کے ذریعہ حسب ذیل متشکل تفاعلوں کی  
قیمتیں سروں کی رقوم میں معلوم کی جاسکتی ہیں:-

$$\frac{۱-ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>}{ف<sub>۱</sub>(ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>)}، \frac{ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>}{ف<sub>۱</sub>(ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>)}، \frac{ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ۱}{ف<sub>۱</sub>(ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>)}، وغیرہ$$

۳- م<sub>۱</sub> کو اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں کے ذریعہ بیان کرو -

حاصل ضرب (۱-ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>) (۱-ع<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub>) ... (۱-ع<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub>) کو ۱ سے تعبیر کرنے سے

اور تفرق کرنے سے

$$\frac{۱}{ف<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> - ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>} = \frac{ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>}{ف<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> - ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub>} = ۱ + ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ع<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ع<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub> + ...$$

نیز  
اس لئے

$$(۱ + ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ع<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ع<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub>) (۱ + ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ع<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ع<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub>) = ۱ + ع<sub>۱</sub> م<sub>۱</sub> + ع<sub>۲</sub> م<sub>۲</sub> + ... + ع<sub>ن</sub> م<sub>ن</sub> + ...$$



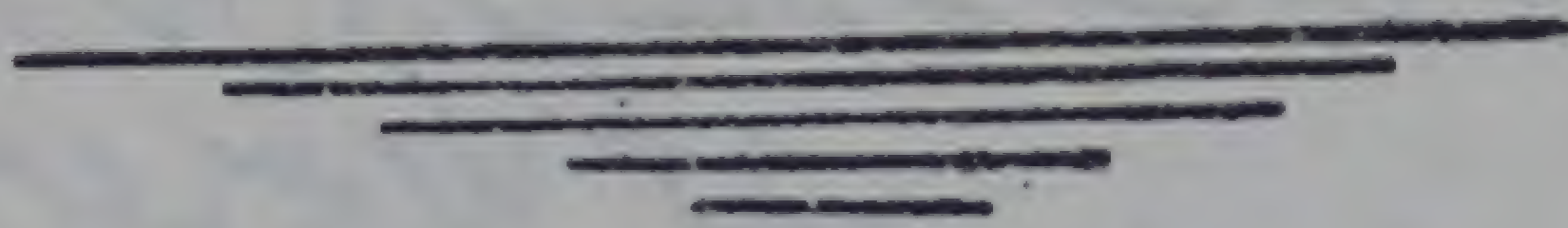
اب ماکہ مختلف قوتوں کے سروں کا مقابلہ کرنے سے ہمیں مساواتوں کی ایک تعداد ملتی ہے جن کے ذریعہ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں  $\pi$ ،  $\pi$ ،  $\pi$  کو  $\pi$ ،  $\pi$ ،  $\pi$  وغیرہ کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

۴۔ متجانس حاصل ضربوں کے مجموعوں کو سروں کی رقوم میں محسوب کرنے کے لئے ذیل کا ضابطہ ثابت کرو:-

$$\frac{\text{فرس} + \text{ر} + \text{ع}}{\text{فر ب}} = (1 + \text{ع}) \pi$$

دفعہ ۸۰ کی مساوات (۱) کی طرفین کو تفرق کرو اور مثال ۲ کی مساوات سے

$\pi$ ،  $\pi$ ،  $\pi$  وغیرہ کو داخل کرو۔





# نوال باب

## مساواتوں کی اصلوں کی انتہائیں

(180)

۸۴۔ انتہاؤں کی تعریف۔ عددی مساواتوں کی حقیقی اصلوں کو

دریافت کرنے کی کوشش میں سب سے پہلے اُن حدود کی قریب ترین قیمتیں معلوم کرنا مفید ہے جسکے اندر یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم یہاں وہ تحقیقات شروع کرتے ہیں جن کا حوالہ دفعہ ۴ کے آخر میں دیا گیا تھا اور چند مسئلے ثابت کرتے ہیں جنکا تعلق مساواتوں کی حقیقی اصلوں کی انتہاؤں سے ہے۔

مثبت اصلوں کی علوی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو ان اصلوں میں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور سفلی انتہا وہ مثبت عدد ہے جو ان میں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو منفی اصلوں کی علوی انتہا وہ منفی عدد ہے جو ان میں سے سب سے بڑی اصل سے بڑا ہو اور انکی سفلی انتہا وہ منفی عدد ہے جو ان میں سے سب سے چھوٹی اصل سے چھوٹا ہو، یہاں سب سے بڑے منفی عدد سے مراد وہ عدد ہے جو  $-\infty$  سے قریب ترین ہے۔

جب ہم وہ انتہائیں معلوم کر لیتے ہیں جنکے اندر مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں تو مساوات کو حل کر نہیں دوسرا کام یہ ہو گا کہ وہ وقفے دریافت کئے جائیں جن میں مختلف اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس موخر الذکر مقصد کے لئے جو خاص طریقے رائج ہیں اُن کا ذکر آئندہ باب میں



کیا جائیگا۔

ذیل کے تمام مسئلے مثبت اصلوں کی علوی انتہاؤں سے متعلق ہیں اور آگے چلکر یہ ثابت کیا جائیگا کہ سفلی انتہاؤں اور منفی اصلوں کی تعین آسانی کے ساتھ ان مسئلوں سے ہو سکتی ہے۔

۸۵۔ مسئلہ ۱۔ کسی مساوات

$$لا + ب + لا + ب + لا + ب + \dots + ب + لا = -$$

میں اگر پہلی منفی رقم۔ بر لا ہو اور اگر بڑے سے بڑا منفی سر

۔ بر ہو تو مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا بر + ۱ ہوگی

(181)

لا کی کوئی قیمت جو

$$لا < بر (لا + لا + \dots + لا + ۱) < بر \frac{لا + ۱ - ۱}{۱ - لا}$$

بنادے بدرجہ اولیٰ ف (لا) کو مثبت بنائیگی۔

اب لا کو ایک سے بڑا لینے سے یہ نامساوات ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-

$$لا < بر \frac{لا + ۱ - ۱}{۱ - لا}$$

$$لا + ۱ - لا < بر لا$$

$$لا + ۱ - لا < بر لا$$

اور پھر یہ نامساوات ذیل کے رشتے سے پوری ہوتی ہے:-



$$(1 - a) = (1 - a) = \dots$$

$$1 - a < 1 - a$$

کیونکہ صریحاً  
اس لئے بالآخر

$$(1 - a) = \dots$$

$$1 - a < 1 - a$$

۱۶۔ مسئلہ ۲۔ اگر کسی مساوات میں ہر منفی سر کو مثبت  
لیا جائے اور اس کو اس کے قبل کے تمام مثبت سروں کے مجموعہ  
سے تقسیم کیا جائے تو وہ بڑے سے بڑا خارج قسمت جو اس طرح  
حاصل ہوا ہے ایک جمع کرنے کے بعد مثبت اصلوں کی  
ایک علوی انتہا ہوگا۔

فرض کرو کہ مساوات ہے

$$1 - a + 1 - a + \dots + 1 - a = \dots$$

جس میں ہم وضاحت کی خاطر چوتھے سر کو منفی سمجھتے ہیں اور عام صورت میں  
ایک منفی سر۔ اور یہ بھی غور کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ اس مساوات کی ہر مثبت رقم کو ضابطہ

$$1 - a = (1 - a) + (1 - a) + \dots + (1 - a) + \dots$$

کے ذریعہ تحویل کیا گیا ہے جہاں یہ ضابطہ

$$1 - a = \frac{1 - a}{1 - a}$$



$$(1-u) \left( 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1^2} + \frac{u^3}{1^3} + \frac{u^4}{1^4} + \dots \right) < 1, \text{ وغيره}$$



$$1 + \frac{1}{1 + \dots + 1 + 1 + 1 + 1} < 1 + \frac{1}{1 + 1 + 1} < 2$$

۸۷۔ عملی اطلاقات۔ اصولوں کی قریبی انتہائیں عملی طور پر معلوم (183)

## مشائیں

$$= 23 + 18 - 17 + 15 - 14$$

کی مثبت اصولوں کی ایک علوی آیت معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے انتہا ملیگی  $8+1$  یعنی ۹

مسئلہ ۲ سے اتنا ملے گی  $\frac{5}{1} + 1$  یعنی ۶



پس ایک علوی انتہا ۶ ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۵ + لا^۳ + لا^۲ - لا^۸ - لا^۵ - لا^۱۸ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

مسئلہ ۱ سے حاصل ہوگا  $لا^۳ + لا^۵ + لا^۱۸$  اور اسلئے ایک انتہا ۵ ہے۔

مسئلہ ۲ سے حاصل ہوگا  $لا^۵ + لا^۳ + لا^۱$  اور اس لئے ایک انتہا ۱۲ ہے۔

اس صورت میں مسئلہ ۱ سے قریب تر انتہا ملتی ہے۔

$$۳۔ لا^۶ + لا^۴ - لا^۳ + لا^۵ - لا^۹ - لا^۱۱ + لا^۶ - لا^۸ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔  
کسروں

$$\frac{۸}{۶+۵+۴+۱} \quad \frac{۶}{۵+۴+۱} \quad \frac{۱۱}{۵+۴+۱} \quad \frac{۹}{۵+۴+۱} \quad \frac{۶}{۴+۱} \quad \frac{۳}{۴+۱}$$

میں سے تیسری کسر سب سے بڑی ہے اور مسئلہ ۲ سے انتہا ہوگی ۳۔ مسئلہ ۱ سے انتہا ملیگی ۵۔

$$۴۔ لا^۴ + لا^۲۰ + لا^۴ - لا^۱۱ - لا^۵ - لا^۱۲۰ + لا^۱۳ - لا^۲۵ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔

جواب :- دونوں طریقوں سے انتہا ملیگی ۶۔

$$۵۔ لا^۴ - لا^۸ + لا^۲۲ + لا^۳۸ - لا^۹۸ - لا^۴۳ + لا^۵ = ۰$$

کی مثبت اصلوں کی انتہا معلوم کرو۔

جواب :- مسئلہ ۱ سے ۲۰، مسئلہ ۲ سے ۳۔

عموماً صرف معائنہ سے ایسی انتہا کا معلوم کرنا ممکن ہے جو متذکرہ صدر مسئلوں سے حاصل شدہ انتہاؤں سے قریب تر ہو۔ یہ طریقہ اس بات پر مشتمل



ہوتا ہے کہ ہم جوڑہ مساوات کی رقموں کو گروہوں میں ترتیب دیں اس طور پر کہ ہر گروہ میں ایک مثبت رقم پہلے رکھی جائے اور پھر یہ دیکھیں کہ وہ کم سے کم صحیح عدد کونسا ہے جس کو لا کی بجائے رکھنے سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ کسی خاص صورت میں خود مساوات کی شکل سے ظاہر ہوگا کہ ترتیب کی صورت کیا ہونی چاہیے۔

۶۔ مثال ۲ کی مساوات کو یوں ترتیب دیا جاسکتا ہے :-

$$0 = 18 + 3L + (51 - 3L) + (8 - L) = 59 - 2L$$

۳ یا اس سے کوئی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ پس ایک علوی انتہا ۳ ہے۔

۷۔ مثال ۴ کی مساوات کی ترتیب یہ ہو سکتی ہے :-

$$0 = 25 - 5L + (11 - L) + 20 + (6 - L) + 13 - 3L = 45 - 10L$$

۳ یا اس سے کسی بڑے عدد سے ہر گروہ مثبت ہو جاتا ہے۔ اسلئے ایک انتہا ۳ ہے۔

۸۔ مساوات

$$0 = 18 + 2L - 33 + 3L - 12 + 18 = 3L - 5$$

کی اصلوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔  
اس کو شکل

$$0 = 18 + (1 - L) + 28 + (5 + L - 12) = 31 - L$$

میں رکھا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ یہ رقمی لا ۱۲ + ۸ کی اصلیں خیالی ہیں یہ لا کی تمام قیمتوں کے لئے مثبت ہے (دیکھو دفعہ ۱۲)۔ پس لا = ۱ علوی انتہا ہے۔  
دو درجہ کو اس طور پر کسی گروہ میں داخل کرنے سے اکثر صورتوں میں فائدہ ہوگا بشرطیکہ اسکی اصلیں خیالی یا مساوی ہوں۔

۹۔ مساوات ۵ - لا - ۱۰ لا - ۲۳ لا - ۹۰ لا - ۳۱۰ = ۰



کی اصولوں کی ایک علوی انتہا معلوم کرو۔

اس قسم کی مثالوں میں سہولت آئیں ہوگی کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کر دیا جائے۔ چنانچہ اوپر کی مساوات کو اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے:-

$$لا(لا-۷) + لا(لا-۱۰) + لا(لا-۲۳) + لا(لا-۹۰) + لا-۷ = ۳۱۷$$
  
ظاہر ہے کہ اصولوں کی ایک علوی انتہا ۷ ہے۔ یہاں عام طریقوں سے زیادہ دور کی انتہا ملتی ہے۔

۱۰۔ مساوات

$$لا-۷ - لا-۲ - لا-۲ - لا-۲ = ۲۴$$

کی اصولوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔

جب منفی رقمیں متعدد ہوں اور بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو تو سہولت آئیں ہے کہ پوری مساوات کو ایسے عدد سے ضرب دیا جائے کہ بڑی سے بڑی قوت والی رقم کو منفی رقموں کے درمیان تقسیم کیا جاسکے۔ یہاں ۲ سے ضرب دیکر مساوات کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$لا(لا-۴) + لا(لا-۸) + لا(لا-۱۶) + لا-۷ = ۹۶$$

علوی انتہا ۴ ہے۔ عام طریقوں سے ۲۵ حاصل ہوگی۔

۸۸۔ مسئلہ ۳۔ کوئی عدد جو کثیر الارقام ف (لا) اور اسکے

تمام مشتق تفاعلوں ف (لا) ف (لا) ف (لا) ... ف (لا)

کو مثبت بنادے مساوات ف (لا) = کی مثبت اصولوں کی

ایک علوی انتہا ہوگا۔

انتہاؤں کو معلوم کرنیکا یہ طریقہ نیوٹن سے منسوب ہے۔ اسکو استعمال کرنے میں قبل الذکر طریقوں کی بہ نسبت بہت زیادہ محنت اٹھانی پڑے گی لیکن اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس سے ہمیشہ بہت قریب کی انتہائیں







$$\frac{1}{2} \text{ فیس (لا) } = 1$$

(186)

نیوٹن کے قاعدے کو اس طریقہ سے استعمال کرنے میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ جب کوئی عدد ایک خاص حد تک کے تمام مشق تفاعلوں کو مثبت بناتا ہے تو اس سے بڑا کوئی عدد بھی ان سب کو مثبت بناتا ہے اور اس طرح سلسلہ کے پچھلے تفاعلوں پر اس عدد کے اثر کو مشاہدہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ امر مساوات

$$\dots + \frac{3}{2 \times 1} \quad \text{فه } (1+1) = \text{فه } (1) + 1 = \text{فه } (1) + 0 = \text{فه } (1)$$



سے ظاہر ہے (سلسلہ کے کسی تفاعل کو ف (لا) سے تعبیر کرو اور مشتق تفاعلوں کے لئے عام ترقیم استعمال کرو) جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) ف (لا) ف (لا) ..... سب کے سب مثبت ہوں اور ۵ بھی مثبت ہو تو ف (لا + ۵) کو مثبت ہونا چاہئے۔

یہ امر غور طلب ہے کہ نیوٹن کے طریقہ میں ایک فائدہ یہ ہے کہ اس سے اکثر و متصل صحیح عددوں کا علم حاصل ہوتا ہے جن کے درمیان بڑی سے بڑی اصل واقع ہوتی ہے۔ مثلاً مثال بالا میں چونکہ لا = ۳ کے لئے ف (لا) منفی اور لا = ۴ کے لئے مثبت ہے اسلئے اس مساوات کی بڑی سے بڑی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۸۹۔ سفلی انتہائیں اور منفی اصلوں کی انتہائیں۔ مثبت

اصلوں کی سفلی انتہا معلوم کرنا ہو تو مساوات کو اول لا = ۱ کے ابدال سے تحویل کرنا چاہئے۔ پھر ما میں جو مساوات حاصل ہوگی اس کی مثبت اصلوں کی علوی انتہا معلوم کرو۔ اسکا متکافی یعنی ۱/ مطلب یہ سفلی انتہا ہوگی کیونکہ

$$ما > ۰ \quad \frac{1}{ما} < ۰ \quad \text{یعنی لا} < ۰$$

منفی اصلوں کی انتہائیں معلوم کرنے کے لئے مجوزہ مساوات کو صرف لا = -۱ کے ابدال سے تحویل کرنا ہوگا۔ یہ استحالہ منفی اصلوں کو مثبت اصلوں میں بدل دیگا۔ فرض کرو کہ ما میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصلوں کی علوی اور سفلی انتہائیں ۵ اور ۵ ہیں تو مجوزہ مساوات کی منفی اصلوں کی انتہائیں -۵ اور -۵ ہوں گی۔

۹۰۔ انتہائی مساواتیں۔ اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی تمام

حقیقی اصلیں معلوم ہو سکیں تو مساوات ف (لا) = ۰ کی حقیقی اصلوں کی



تعداد معلوم کرنا ممکن ہے۔

اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ  $F(لا) =$  کی حقیقی اصلیں مقدار کے لحاظ سے صعودی ترتیب میں  $عہ$ ،  $یہ$ ،  $جہ$ ،  $لہ$  ہیں اور فرض کرو کہ قیمتوں کا حسب ذیل سلسلہ  $لا$  کی بجائے  $F$  (لا) میں درج کیا گیا،

$۔ عہ$ ،  $یہ$ ،  $جہ$ ،  $لہ$ ،  $۔$  جب ان مقداروں میں سے کسی دو متصل مقداروں سے مختلف العلا نتیجے حاصل ہوں تو ان کے درمیان  $F(لا) =$  کی ایک اصل ہوگی اور نتیجہ صریح دفعہ  $ا$  کی رو سے صرف ایک اصل ہوگی۔ لیکن جب نتیجے ہم علامت ہوں تو اسی نتیجہ صریح کی رو سے ان کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں ہوگی۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مذکورہ بالا مقداروں کو درج کرنے سے نتیجوں میں ہر علامت کی تبدیلی مجوزہ مساوات کی ایک حقیقی اصل کو مستلزم ہے۔

اگر  $F(لا) =$  کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ  $ا$  کے مسئلہ سے یہ ظاہر ہے کہ  $F(لا) =$  کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور یہ کہ وہ ایک ایک کر کے  $F(لا) =$  کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اسی صورت میں اور اسی مسئلہ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  $F(لا) =$  اور باقی سب مشتق تفاعلوں کی اصلیں بھی حقیقی ہیں اور ان میں سے کسی تفاعل کی اصلیں اس تفاعل کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان واقع ہوتی ہیں جس کا یہ مشتق ہے۔

اس قسم کی مساواتوں کو جو کسی مجوزہ مساوات کے درجہ سے بقدر ایک کے گھٹی ہوئی ہوں اور جنکی اصلیں مجوزہ مساوات کی اصلوں کے ہر متصل زوج کے درمیان واقع ہوں ہم انتہائی مساواتیں کہیں گے۔

یہ ظاہر ہے کہ نیوٹن کے طریقہ سے اصلوں کی انتہائیں معلوم کر نہیں جب  $F(لا) =$  کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو دفعہ  $ا$  میں تبادلات ہوئے



طریقہ کی بموجب عمل کرنے سے تفاعل ف (لا) خود آخری تفاعل ہو گا جسکو مثبت بنانا ہو گا اور اس لئے جس علوی انتہا پر ہم پہنچتے ہیں وہ بڑی سے بڑی اصل کے عین بعد کا صحیح عدد ہو گا۔

## مثالیں

(188)

۱۔ ثابت کرو کہ ف (لا) = . کے کسی مشتق تفاعل فم (لا) = . کی خیالی اصلیں ف (لا) کی خیالی اصلوں سے زیادہ نہیں ہو سکتیں لیکن یہی اصلیں زیادہ ہو سکتی ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مشتق تفاعل میں خیالی اصلوں کا مجموعہ ہونا معلوم ہو تو خیالی اصلوں کی کم از کم اتنی ہی تعداد ابتدائی مساوات میں داخل ہونی چاہئے۔

۲۔ دفعہ ۹۰ کا طریقہ استعمال کر کے وہ شرطیں معلوم کرو کہ مساوات لا<sup>۳</sup> - ق لا + ل = .

کی تمام اصلیں حقیقی ہوں۔

۳۔ اسی طریقہ سے مساوات

لا<sup>۵</sup> - ن ق لا + (ن - ۱) ل = .

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

جواب: جب ن جفت ہو تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا کوئی بھی نہیں جب اسکے کہ

ق<sup>۵</sup> < یا > ق<sup>۵</sup> - ۱

جب ن طاق ہو تو تین حقیقی اصلیں ہیں یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

ق<sup>۵</sup> < یا > ق<sup>۵</sup> - ۱

۴۔ مساوات لا<sup>۴</sup> (لا - ۱) = . کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ن واں مشتق



تفاعل معلوم کر کے ثابت کرو کہ حسب ذیل مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہیں :-

$$\text{لا۔ ن} \frac{\text{ن}}{\text{ن}^2} \text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2 \times 1} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\text{ن}^2(\text{ن}-1)} \text{لا} - \frac{\text{ن}^2}{2} = \text{غیر} =$$

۵۔ اسی طرح (لا۔ ۱) کا ن واں مشتق معلوم کر کے ثابت کرو کہ ذیل کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہیں اور ۱ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں :-

$$\text{لا۔ ن} \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\text{ن}^2(\text{ن}-1)} \text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2 \times 1} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\text{ن}^2(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)} \text{لا} =$$

۶۔ اگر مساوات ذیل میں مقادیر ل، م، ن میں سے کسی دو کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دو درجی جسمیں یہ مساوات تحول ہو جاتی ہے ایک انتہائی مساوات ہے اور ثابت کرو کہ مجوزہ مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہیں :-

$$(1-\text{لا})(\text{لا}-\text{ب})(\text{لا}-\text{ج}) - \text{ل}^2(\text{لا}-1) - \text{م}^2(\text{لا}-\text{ب}) - \text{ن}^2(\text{لا}-\text{ج}) - \text{ل}^2\text{م}\text{ن} =$$

۷۔ مساوات

$$\text{لا}^4 + \text{لا}^3 - \text{لا}^2 - \text{لا} - 12 + \text{پ} =$$

کی اصلوں کی نوعیت پر پ کی مختلف قیمتوں کے لئے بحث کرو۔  
 دفعہ ۹۰ استعمال کرو۔ جب پ = ۰ سے کم ہو تو دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ جب پ = ۱ اور ۹ کے درمیان واقع ہو تو تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ جب پ = ۹ سے بڑا ہو تو تمام اصلیں خیالی ہیں۔ مساوات کی دو اصلیں مساوی ہونگی جبکہ پ = ۰ اور مساوی اصلوں کے دوزوج ہونگے جبکہ پ = ۹۔



(189)

## دسواں باب

### مساواتوں کی اصلوں کو جدا کرنا

۹۱۔ گزشتہ باب کے طریقوں سے ہم وہ حدود معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان کسی عددی مساوات کی تمام حقیقی اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ کسی خاص اصل کو عملاً تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر یہ اصل جس وقفہ میں واقع ہوتی ہے اس کو ایسے وقفوں سے علیحدہ کر لینا ضروری ہے جنہیں باقی دوسری اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اس باب میں چند مسئلے بیان کئے جائیں گے جن کا مقصد متغیر کی کسی دو اختیاری طور پر مفروضہ قیمتوں کے درمیان مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد متعین کرنا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ مقصد پورا ہو جائے تو نہ صرف حقیقی اصلوں کی کل تعداد معلوم کرنا ممکن ہو جائیگا بلکہ ہم وہ حدود بھی معلوم کر سکیں گے جن کے درمیان اصلیں فرداً فرداً واقع ہوتی ہیں اس مقصد کو پیش نظر رکھ کر فوریر (Fourier) اور بودان

(Budan) نے جو مسئلے بیان کئے ہیں وہ اگرچہ طرز بیان کا لحاظ کرتے مختلف ہیں لیکن اصول میں مماثل ہیں۔ اس اصول کو سمجھانے کے لئے فوریر کا بیان زیادہ سہولت بخش ہے لیکن عملی طور پر استعمال کرنا بودان کے بیان کو ترجیح حاصل ہے۔ سٹورم (Sturm) کا مسئلہ اگرچہ عملاً زیادہ محنت طلب ہے لیکن قبل الذکر پر اس کا فائدہ یہ ہے کہ اس کو استعمال کرنے سے کسی دو مجوزہ مقداروں کے درمیان حقیقی اصلوں کی بالکل ٹھیک تعداد ہمیشہ معلوم ہو جاتی ہے حالانکہ فوریر اور



بوڈان کے مسئلہ سے صرف ایک خاص حد حاصل ہوتی ہے جسکے آگے حقیقی  
اصلوں کی تعداد مجوزہ وقفہ کے اندر متجاوز نہیں کر سکتی۔

۹۲۔ فوریر اور بوڈان کا مسئلہ۔ فرض کرو کہ دو عدد ۱ اور

ب (۱ > ب) لا کی بجائے اس سلسلہ میں درج کئے گئے ہیں  
جوف (لا) اور اس کے مشتق تفاعلوں سے بتا ہے یعنی سلسلہ  
فیل میں

ف (لا)، ف (لا)، ف (لا) ... ف (لا)

تو حقیقی اصلوں کی تعداد جو ۱ اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہیں (190)

اس اضافہ سے بڑی نہیں ہو سکتی جو سلسلہ بالا میں علامتوں کی تبدیلیوں

کی اس تعداد کو بولا کی بجائے ۱ درج کرنے سے حاصل ہوتی ہیں تبدیلیوں کی

اس تعداد پر ہے جو لا کی بجائے ب درج کرنے سے حاصل

ہوتی ہیں۔ اور جب اس وقفہ میں حقیقی اصلوں کی تعداد اس اضافہ

سے کم پڑتی ہو تو یہ کمی بقدر ایک جفت عدد کے ہوگی۔

یہ وہ شکل ہے جس میں فوریر اس مسئلہ کو بیان کرتا ہے۔

یہاں یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ جب ہم دو عددوں ۱ اور ب

کا ذکر کرتے ہیں جن میں سے ۱ چھوٹا ہے تو انہیں سے ایک یا دونوں

منفی ہو سکتے ہیں اور مطلب یہ ہوتا ہے کہ ۱ بہ نسبت ب کے -∞

سے زیادہ قریب ہے۔

اب ہم ان تبدیلیوں کی جانچ کرتے ہیں جو سلسلہ بالا کے  
تفاعلوں کی علامتوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتی ہیں جب لا کی



قیمت کو ۱ سے ب تک مسلسل طور پر بڑھتا ہوا فرض کیا جائے۔ حسب ذیل چار مختلف صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں:-

(۱) لا کی قیمت مساوات ف (لا) = کی ایک واحد اصل میں گذر سکتی ہے۔

(۲) وہ ف (لا) = میں ر مرتبہ تکرار پانچواں اصل میں سے گذر سکتی ہے۔

(۳) وہ امدادی تقاطعوں ف م (لا) = میں سے کسی ایک کی اصل میں سے گذر سکتی ہے اور یہ اصل ف م (لا) = یا ف م +۱ (لا) = میں سے کسی میں واقع نہیں ہوتی۔

(۴) وہ ف م (لا) = میں ر مرتبہ تکرار پانچواں اصل میں سے

گذر سکتی ہے اور ف م -۱ (لا) = میں واقع نہیں ہوتی۔

ذیل میں ہم سہولت کے منظر ف (لا) کی بجائے صرف ف سے کام لیتے۔

(۱) پہلی صورت میں دفعہ ۵ کی رو سے یہ ظاہر ہے کہ مساوات

ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گذرنے میں علامت کی

ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے کیونکہ اصل میں سے گذرنے کے

عین قبل ف اور ف کی علامتیں مختلف ہوتی ہیں اور

گذرنے کے عین بعد موافق۔

(۲) دوسری صورت میں ف (لا) = کی ر صفی اصل میں سے

گذرنے میں یہ ظاہر ہے کہ علامت کی ر تبدیلیاں کم ہو جاتی

ہیں کیونکہ دفعہ ۶ کی رو سے گذرنے کے عین قبل تقاطعوں

ف، ف، ف، ف، ف، ف، ف، ف

کی علامتیں باری باری سے + اور - یا - اور + ہوتی ہیں







ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،  
 ر + تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو۔

(ب) جب ک ف۔ (ع) اور ف۔ (ع) مختلف علامت ہوں تو  
 ر تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر جفت ہو،  
 ر۔ تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اگر ر طاق ہو۔

اس لئے بحیثیت مجموعی ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ ف م (لا) کی ر ضیفی  
 اصل میں سے گزرتے وقت تبدیلیوں کی جفت تعداد کم ہو جاتی ہے۔  
 یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ (۱)، (۲) کی ایک خاص صورت ہے اور  
 (۳)، (۴) کی ایک خاص صورت یعنی جسکے ر = ۱۔ لیکن چونکہ صورتیں  
 (۱) اور (۳) اکثر وقوع پذیر ہوتی ہیں اس لئے ان کو علیحدہ جماعت میں  
 رکھنا ہی بہتر ہے۔

ثبوت بالا پر نظر ثانی کرنے سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جب 'لا'،  
 ۱ سے ب تک بڑھتا ہے تو علامت کی کسی تبدیلی کا اضافہ نہیں ہو سکتا  
 اور یہ کہ ف (لا) =۔ کی ہر واحد اصل میں سے گزرتے وقت  
 علامت کی ایک تبدیلی کم ہوتی ہے اور نیز یہ کہ کسی حال میں بھی علامت  
 کی تبدیلیوں کی طاق تعداد کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت کے  
 جسکے لا آ ف (لا) =۔ کی ایک اصل میں سے گزرتے۔ پس ۱ سے  
 ب تک لا کے کل تغیر میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد جو کم ہوتی ہے  
 وہ یا تو اس وقفہ میں ف (لا) =۔ کی حقیقی اصلوں کی تعداد کے مساوی  
 ہونی چاہئے یا اس سے بقدر ایک جفت عدد کے متجاوز ہونی چاہئے۔  
 اس لئے مسئلہ بالا ثابت ہو گیا۔

(192)

۹۳۔ مسئلہ کا استعمال۔ اس مسئلہ کو بوڈان نے جس شکل میں

بیان کیا ہے وہ جیسا کہ اوپر مذکور ہوا عملی مقاصد کے لئے زیادہ سہولت بخشتا ہے۔



چنانچہ بوڈان اسکویوں بیان کرتا ہے :- فرض کرو کہ مساوات  $f(x)$  کی اصلوں کو اول بقدر  $1$  کے اور بعد میں بقدر  $b$  کے گھٹا دیا گیا ہے جہاں  $1$  اور  $b$  کوئی عدد ہیں اور  $1$  سے بڑھ چھوٹا ہے۔ تب  $1$  اور  $b$  کے درمیان حقیقی اصلوں کی تعداد اُس اضافے سے بڑی نہیں ہو سکتی جو پہلی احتمال شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو دوسری احتمال شدہ مساوات میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد پر ہے۔

فوریہ کے بیان میں یہ بات صریحاً شامل ہے کیونکہ یہ دونوں احتمال شدہ مساواتیں حسب ذیل ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)

$$f(x) + f(1)x + \dots + \frac{f(1)x^n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = 0$$

$$f(x) + f(b)x + \dots + \frac{f(b)x^n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = 0$$

دفعہ مابقی کے نتیجوں کو تسلیم کرنے کے بعد ان مساواتوں سے مسئلہ بالا کی صداقت ظاہر ہے۔

اس شکل میں مسئلہ کے محلی طور پر سہولت بخش ہونے کی وجہ یہ ہے کہ ہم اصلوں کو گھٹا نیکادہ طریقہ استعمال کر سکتے ہیں جو دفعہ ۳۳ میں بتایا گیا ہے۔

مثالیں

۱۔ مساوات



$$لا^۵ - لا^۴ - ۲۴ لا^۳ + ۹۵ لا^۲ - ۴۶ لا - ۱۰ = ۰$$

کی اصولوں کا محل وقوع معلوم کرو۔  
ہم اس تفاعل کی جانچ لا کی ان قیمتوں کے لئے کرتے ہیں جو وقفوں

$$۱۰، ۱، ۰، ۱، ۱۰$$

کے درمیان واقع ہیں۔ ان عددوں کو صرف اسوجہ سے اختیار کیا گیا ہے کہ  
عمل حساب میں سہولت پیدا ہو۔ اصولوں کو بقدر ایک کے گھٹانے سے استحالة شہدہ  
مساوات کے سروں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے

$$۱، ۲، ۲۶، ۱۵، ۶۵، ۸۰$$

اصولوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹایا جائے تو عمل حساب کی ابتدا ہی میں یہ ظاہر  
ہو جاتا ہے استحالة شہدہ مساوات کے سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہونگی۔  
اس لئے اس صورت میں عمل حساب کی تکمیل کرنے کی ضرورت نہیں۔  
اصولوں کو بقدر ۱۰ اور ۱ کے گھٹانے میں سہولت اس میں ہے کہ  
مساوات کی متبادل علامتوں کو بدل کر اصولوں کو بقدر ۱۰ اور ۱ کے  
گھٹایا جائے اور پھر حاصل شدہ نتیجہ میں متبادل علامتوں کو بدلا جائے۔ جب  
اصولوں کو بقدر ۱ کے گھٹایا جاتا ہے تو استحالة شہدہ مساوات کے سر حاصل  
ہوتے ہیں

$$۱، ۸، ۲، ۱۳۹، ۲۹۱، ۶۰$$

اصولوں کو بقدر ۱۰ کے گھٹانے میں گزشتہ کی طرح اثنائے عمل  
میں ہی ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ استحالة شہدہ مساوات کی علامتیں سب کی سب مثبت  
ہیں یعنی جب متبادل علامتوں کو بدلا جاتا ہے تو وہ باری باری سے مثبت  
اور منفی ہوتی ہیں۔

اس طرح ہمیں ذیل کا نقشہ ملتا ہے:-

$$(۱۰-) \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

$$(۱-) \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad +$$

$$(۰) \quad - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad (خود مساوات کی علامتیں)$$



(۱) + + - + + -

(۱۰) + + + + + +

یہ علامتیں وہ علامتیں ہیں جو ف (لا) اور اس کے مختلف مشتق تقاف  
ف ک ف ہ ف ہ ف ہ ف ہ اس وقت اختیار کرتے ہیں جب مجوزہ عدد دو کو

لا کی بجائے درج کیا جائے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ ان کو یہاں دفعہ ۹۲ کی ترتیب

کی بموجب نہیں بلکہ اس کے بالعکس لکھا گیا ہے یعنی ف ہ ف ہ ف ہ ف ہ ف ہ

نقشہ بالا سے ہم ذیل کے نتیجے اخذ کرتے ہیں:- سب اصولوں کو-۱۰

اور ۱۰ کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ ایک حقیقی اصل - ۱۰ اور ۱ کے  
درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ ایک  
حقیقی اصل - ۱ اور صفر کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ علامت کی ایک  
تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ صفر اور ۱ کے درمیان کوئی حقیقی اصل واقع نہیں ہوتی  
۱ اور ۱ کے درمیان چونکہ علامت کی تین تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں،  
کم از کم ایک حقیقی اصل ہے۔ لیکن باقی دو اصولوں کی نوعیت مشتبہ رہ جاتی  
ہے یا تو وہ خیالی ہیں یا ۱ اور ۱ کے درمیان تین حقیقی اصلیں ہیں۔

ہم یہ عمل کر سکتے ہیں کہ مزید استحالات کے ذریعہ ۱ اور ۱ کے درمیانی  
وقف کو تنگ کر کے اسکی جانچ کریں تاکہ دونوں مشتبہ علامتوں کی نوعیت  
معلوم ہو سکے لیکن یہ ظاہر ہے کہ اگر یہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو اس مقصد  
کے لئے حسابی اعمال میں بہت زیادہ محنت برداشت کرنی ہوگی۔ فوراً  
اور لوڈان کے مسئلہ کا یہی نقص ہے۔ دونوں نے اس نقص کو دور کرنے کی  
کوشش کی ہے اور مشتبہ وقفوں میں اصولوں کی نوعیت معلوم کرنے کے طریقے  
دریافت کئے ہیں لیکن یہ طریقے پیچیدہ ہیں اس لئے ہم ان کو درج نہیں کرتے  
خصوصاً اس وجہ سے بھی کہ اسٹرم کے مسئلہ سے وہ تمام مقاصد پورے  
ہو جاتے ہیں جنکے لئے فوراً اور بوڈان نے طریقے ایجاد کئے تھے۔



۲۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کے محل وقوع معلوم کرو۔  
اسکی سب اصلیں حقیقی ہیں اور ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں (دیکھو مثال ۵ صفحہ ۱۴۶)۔ جب کبھی کسی مساوات کی تمام اصلیں حقیقی ہوں تو فوراً کے تفاعلوں کی علامتوں سے کسی دو مجوزہ صحیح عددوں کے درمیان حقیقی اصلوں کی صحیح تعداد معلوم ہو جاتی ہے۔ چنانچہ ہم نتیجہ ذیل حاصل کرتے ہیں:۔ اصلیں وقفوں

$$(۲، ۱) (۰، ۱) (۱، ۲)$$

کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ - لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

جواب:۔ وقفہ (۱، ۲) میں دو اصلیں اور وقفوں (۰، ۱) (۱، ۲) میں سے ہر ایک میں ایک اصل

۴۔ مساوات

$$لا^۸ - لا^۷ + لا^۶ - لا^۵ + لا^۴ - لا^۳ + لا^۲ - لا + ۱ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

اس مساوات میں منفی اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ اصلوں کو متواتر بقدر ۱ کے گھٹاؤ یہاں تک کہ سروں کی علامتیں سب کی سب مثبت ہو جائیں۔ نتیجہ ذیل حاصل ہو گا:۔

|   |   |   |   |   |     |
|---|---|---|---|---|-----|
| + | - | + | - | + | (۰) |
| - | + | + | - | + | (۱) |
| + | + | - | + | + | (۲) |
| + | - | + | + | + | (۳) |
| + | + | + | + | + | (۴) |



اس طرح صفر اور ۱۰ کے درمیان ایک اصل ہے، ۱۰ اور ۲۰ کے درمیان ایک اصل، ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان کوئی اصل نہیں۔ ۳۰ اور ۴۰ کے درمیان یا تو دو حقیقی اصلیں ہیں یا خیالی اصلوں کا ایک زوج۔ تیسری احتمال شدہ مساوات کی اصلوں کو بقدر اکائیوں کے گھٹانے سے یہ معلوم ہو گا کہ دو حقیقی اصلیں موجود ہیں۔ اس عمل سے اصلیں علیحدہ ہو جائیں گی اور (۲، ۳) اور (۴، ۵) کے درمیان انکا واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ پس مجوزہ مساوات کی تیسری حقیقی اصل وقفہ (۳۲، ۳۳) میں واقع ہوتی ہے اور چوتھی وقفہ (۳۴، ۳۵) میں۔

## ۹۴۔ مسئلہ استعمال خیالی اصلوں پر۔ اب چونکہ

لا جب  $\infty$  سے  $\infty +$  تک گزرتا ہے تو علامت کی صرف تبدیلیاں کم ہو سکتی ہیں اس لئے اگر یہ یقین کر لیں کہ کسی وقفہ میں ہمیں لا کی کوئی حقیقی اصل شامل نہیں ہوتی علامت کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں تو ہم یہ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ خیالی اصلوں کا ایک زوج موجود ہے۔ فوراً یہ مسئلہ استعمال کرتے وقت اس قسم کے حالات اس وقت پیدا ہوں گے جب کسی احتمال شدہ مساوات میں معدوم ہونے والے سر شامل ہوں۔ کیونکہ ہم دفعہ ۶ کے اصول کی مدد سے ایسے سر کی واجبی علامت متعین کر سکتے ہیں جو لا کی اس قیمت کے عین پیشتر اور عین بعد کی قیمتوں کے جواب میں ہو جس کے اندراج سے یہ سر معدوم ہوتا ہے۔ یہ پورا وقفہ اتنا چھوٹا لینا چاہئے کہ ف (لا) = لا کی کوئی اصل اس میں شامل نہ ہوئے پائے۔

(195)

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا - لا^۲ - لا^۳ + ۲۳ =$$

کا تجزیہ کرو۔



ہم اس تفاعل کا امتحان وقفوں ۱، ۰ کے درمیان کریں گے۔ نتیجہ شدہ مساواتیں

ہونگی

$$\frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{4}f(1) + \frac{1}{4}f(2) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{4}f(1) + \frac{1}{4}f(2) = 0$$

$$\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{4}f(2) + \frac{1}{4}f(3) = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{4}f(2) + \frac{1}{4}f(3) = 0$$

$$\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{4}f(3) + \frac{1}{4}f(4) = \frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{4}f(3) + \frac{1}{4}f(4) = 0$$

انہیں سے پہلی مساوات خود مجوزہ مساوات ہے۔  
دفعہ گذشتہ کے طریقہ سے حساب لگایا جائے تو سرف  $f(1) = 0$  اور  
بہیں ذیل کا نقشہ ملے گا:-

$$+ \quad - \quad 0 \quad - \quad + \quad (0)$$

$$+ \quad - \quad - \quad 0 \quad + \quad (1)$$

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad (10)$$

اب ہم ہر اس سطر کو جس میں صفر سر شامل ہے دو سطروں سے  
بدل سکتے ہیں۔ ایک اس قیمت کے جواب میں جو صفر سر پیدا کر نیوالی  
قیمت سے ذرا چھوٹی ہو اور دوسری اس قیمت کے جواب میں جو اس سے  
ذرا بڑی ہو علامتیں دفعہ ۶ میں بتلائے ہوئے طریقہ کے بموجب متعین ہونگی۔  
یہ یاد رہے کہ اوپر کے نقشہ میں مشتق تقاطعوں کو تعبیر کرنے والی علامتیں دفعہ ۶  
کی ترتیب کے بالعکس لکھی گئی ہیں۔ اب نقشہ بالائی صورت وہ ہوگی جو ذیل  
میں درج ہے جہاں ۵ ایک بہت چھوٹی مثبت مقدار ہے:-

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad 5 \quad - \quad \left. \begin{array}{l} (0) \\ (1) \end{array} \right\}$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad + \quad 5 \quad + \quad \left. \begin{array}{l} (1) \\ (10) \end{array} \right\}$$

$$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad (10)$$



جہاں  $-$  اور  $+$  کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں اس شرط کے تحت متعین ہوتی ہیں کہ وہ سر (جو صفر ہوتا ہے جبکہ  $0 = 1$ ) کے لئے  $-$  کے لئے علامت میں اس سر سے مختلف ہونا چاہئے جو اس کے عین واپسی جانب ہے۔ اور  $1 = 0$  کے لئے یہ دونوں علامتیں وہی ہونی چاہئیں۔  
۱۔  $+$  اور  $+$  کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتیں بھی اسی طرح متعین ہوتی ہیں۔

(196)

اب چونکہ وقفہ  $(- , +)$  میں علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور چونکہ  $-$  اور  $+$  کے درمیان کوئی حقیقی اصل نہیں ہے اس لئے خیالی اصولوں کے ایک زوج کا وجود ثابت ہو گیا۔  $+$  اور  $-$  کے درمیان علامتوں کی دو تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے اس وقفہ میں یا تو حقیقی اصولوں کا ایک زوج شامل ہے یا خیالی اصولوں کے ایک زوج کا امکان ہے۔ اس سے کوئی صورت صحیح ہے یہ مشتبہ ہے۔

۲۔ اگر متعدد سر معدوم ہوں تو ہم خیالی اصولوں کے متعدد ازواج کا وجود ثابت کر سکتے ہیں۔ یہ بات ذیل کی مثال سے ترشح ہے:-  
 $1 = 0$

$-$  اور  $+$  کے جواب میں علامتیں وقفہ  $+$  کے مسئلہ کی رو سے یہ ہونگی:-

$(- , + , - , + , - , +)$

$(+ , + , + , + , + , +)$

پس چونکہ  $-$  اور  $+$  کے درمیان کوئی اصل موجود نہیں اور چونکہ صفر سے ذرا چھوٹی قیمت سے صفر سے ذرا بڑی قیمت تک جانے میں علامت کی چار تبدیلیاں کم ہوتی ہیں اس لئے ہمیں خیالی اصولوں کے دو زوجوں کے وجود کا یقین ہو جاتا ہے۔ باقی دو اصلیں اس صورت میں صریحاً حقیقی ہیں (دیکھو نوٹ ۱۲) کسی شنائی مساوات میں خیالی اصولوں کی تعداد اس طریقہ سے متعین کی جا سکتی ہے۔



۳۔ مساوات

$$\text{لا} + ۱۰ \text{ لا} + \text{لا} - ۴ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔  
لا کی ایک چھوٹی منفی قیمت سے اس کی ایک چھوٹی مثبت قیمت تک  
ہمیں علامتوں کا حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے۔

$$- + - + + - + - + \quad (- ۵)$$

$$- + ۰ + ۰ ۰ ۰ + \quad (۰)$$

$$- + + + + + + + \quad (+ ۵)$$

اب چونکہ یہاں علامت کی چھ تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اس لئے  
خیالی اصلیں تعداد میں چھ ہیں۔ باقی دو اصلیں دفعہ ۱۲ کی رو سے حقیقی ہیں  
ایک مثبت اور دوسری منفی۔ منفی اصل - ۲ اور - ۱ کے درمیان واقع  
ہوتی ہے اور مثبت اصل صفر اور ایک کے درمیان۔

۴۔ مساوات

$$\text{لا} - ۳ \text{ لا} - \text{لا} + ۱ = ۰$$

کا مکمل تجزیہ کرو۔

اس کی دو اصلیں خیالی ہیں۔ جب کبھی (جیسا کہ موجودہ صورت میں)  
اصلیں چھوٹے حدود کے اندر واقع ہوں تو بقدر ایک کے متواتر گھٹانے میں  
سہولت ہوگی۔ اس طریقہ سے ہم یہاں صفر اور ایک کے درمیان ایک اصل  
معلوم کرتے ہیں اور دوسری ۱ اور ۲ کے درمیان۔ منفی اصلوں کو  
معلوم کرتے وقت ہم یہ دیکھتے ہیں کہ بقدر - ۱ کے گھٹانے میں خود - ۱ ایک  
اصل ہے اور - ۱ سے ذرا بڑی قیمت کے جواب میں حاصل ہونیوالی علامتوں کو  
لکھ لیتے ہیں - ۱ اور صفر کے درمیان دوسری منفی اصل کا موجود ہونا معلوم  
ہوتا ہے۔

۵۔ مساوات ذیل کا تجزیہ کرو۔

$$\text{لا} + \text{لا} + \text{لا} - ۲۵ \text{ لا} - ۳۲ = ۰$$



اسکی دو اصلیں خیالی ہیں۔ ۲ اور ۳ کے درمیان ایک حقیقی اصل ہے اور وقفوں (۲-۳) اور (۱-۲) کے درمیان دو حقیقی منفی اصلیں ہیں۔

(197)

۹۵۔ فوریر اور پوڈان کے مسئلہ سے نتائج صریح:۔ خیالی

اصلوں کے وجود کا پتہ لگانے کا وہ طریقہ جو دفعہ ماضی میں بیان ہوا دوسری

علامت کا قاعدہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح کا ایک قانون جو ڈی گوا

سے منسوب کیا جاتا ہے فوریر کے مسئلہ کے انکشاف سے پہلے رائج تھا۔

یہ اور ڈیکارٹ کا قانون علامت فوریر کے مسئلہ کے نتائج صریح ہیں جیسا کہ ہم اب ثابت کریں گے۔

نتیجہ صریح (۱)۔ خیالی اصلوں کو معلو کرنے کے لئے ڈی گوا

کا قاعدہ۔

اس قاعدہ کو عموماً یوں بیان کیا جاتا ہے:۔ جب کسی مساوات

میں ۲ متواتر رقبے موجود نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں

تعداد میں ۲ م ہوں گی۔ اور جب ۲ م + ۱ متواتر رقبے موجود

نہ ہوں تو مساوات کی خیالی اصلیں تعداد میں ۲ م + ۲ یا ۲ م

ہوں گی موجب اسکے کہ جن دو رقبوں کے درمیان رقبوں کی یہ کمی

واقع ہوتی ہے وہ علامت میں موافق یا مختلف ہوں۔

یہ قاعدہ ثابت ہو جاتا ہے اگر ہم دفعہ ۹۲ (۴) کی طرح اس بات

کی جانچ کریں کہ لا کے ایک چھوٹی منفی قیمت - ۵ سے ایک چھوٹی مثبت

قیمت + ۵ تک جانے میں علامت کی کتنی تبدیلیاں کم ہوتی ہیں۔



نتیجہ صریح (۲)۔ ڈیکارٹ کا قانون علامت۔

تفاعلوں کے سلسلہ  $f_n (لا) f_{n-1} (لا) f_{n-2} (لا) f_{n-3} (لا) \dots$   
 $f_{n-2} (لا) f_{n-1} (لا) f_n (لا)$  میں لا کی بجائے اگر صفر درج  
 کیا جائے تو علامتیں وہی ہونگی جو مجوزہ مساوات کے سروں  $f_{n-1} (لا) f_{n-2} (لا) f_{n-3} (لا) \dots$   
 $f_{n-2} (لا) f_{n-1} (لا) f_n (لا)$  کی ہیں لیکن  $+ \infty$  درج کیا جائے تو سب علامتیں  
 مثبت ہونگی۔ فوریر کے مسئلہ میں یہ ثابت ہوا ہے کہ ان حدود کے  
 درمیان اصلوں کی تعداد یعنی مثبت اصلوں کی تعداد علامت کی تبدیلیوں  
 اس تعداد سے زیادہ نہیں ہو سکتی جو صفر سے  $+ \infty$  تک گزرنے میں کم  
 ہو جاتی ہیں یعنی علامت کی تبدیلیوں کی اس تعداد سے جو سلسلہ  
 $f_{n-2} (لا) f_{n-1} (لا) f_n (لا) \dots$  میں پائی جاتی ہے۔ مثبت اصلوں کے لئے  
 ڈیکارٹ کا قانون یہی ہے اور منفی اصلوں کے لئے بھی اسی طرح کا  
 قانون حاصل ہوتا ہے اگر ہم منفی اصلوں کو مثبت اصلوں سے بدلیں

نتیجہ صریح (۳)۔ جب ایک عدد  $h$  ایسا معلوم ہو جائے

جو تفاعلوں  $f_n (لا) f_{n-1} (لا) f_{n-2} (لا) \dots f_1 (لا) f_0 (لا)$   
 $f_n (لا)$  میں سے ہر ایک کو مثبت بناتا ہے تو چونکہ  $+ \infty$  بھی ان میں سے  
 ہر ایک کو مثبت بناتا ہے اس لئے فوریر کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ  
 $h$  اور  $\infty$  کے درمیان کوئی اصل نہیں ہو سکتی یعنی مثبت اصلوں کی  
 ایک علوی حد  $h$  ہے اور یہی نیومن کا مسئلہ ہے (دفعہ ۸۸)۔

۹۶۔ اسٹرم کا مسئلہ۔ ہم نے پہلے یہ بتا دیا ہے (دفعہ ۴۷) کہ



کثیر الارقام ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف (لا) کا مقسوم علیہ عظم معمولی جبری طریقوں سے نکال کر مساوات ف (لا) = کی مساوی اصلوں کو معلوم کرنا کس طرح ممکن ہے۔ اسٹرم نے یہی طریقہ ان امدادی تفاعلوں کو بنانے میں استعمال کیا ہے جن سے کسی مساوات کی اصلوں کو جدا کر نہیں دے سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے مشتق تفاعل ف (لا) کا مقسوم علیہ عظم نکالنے کا عمل پورا کر دیا گیا ہے۔ یکے بعد دیگرے آئیو الے باقی درجہ میں گھٹتے جائینگے یہاں تک کہ ہم یا تو ایسے باقی پر پہنچیں جو اپنے سے عین قبل کے باقی کو پورا پورا تقسیم کرتا ہے یا ایسے باقی پر جس میں متغیر سرے سے شامل ہی نہیں ہوتا یعنی جو عددی ہے۔ موخر الذکر صورت میں مساوی اصلوں کا وجود نہ ہوگا اور قبل الذکر صورت میں جیسا کہ ہم نے دیکھا ہے مساوی اصلوں کی موجودگی ظاہر ہوتی ہے۔ اسٹرم کے مسئلہ کو ان دو صورتوں میں تقسیم کر کے ان پر جداگانہ بحث کرنا سہولت بخش ہے۔ ہم اس دفعہ میں اس صورت پر غور کریں گے جس میں مساوی اصلیں موجود نہیں ہوتیں اور دفعہ آئندہ میں مساوی اصلوں کی صورت پر۔ خود عمل کی تکمیل سے یہ بات واضح ہو جائیگی کہ کسی دی ہوئی مثال کو کس جماعت سے متعلق کرنا چاہئے۔

اسٹرم کے امدادی تفاعل وہ باقی نہیں ہیں جو عمل حساب میں خود پیش ہوتے ہیں بلکہ وہ باقی جنکی علامتیں تبدیل کر دی گئی ہوں۔

دو جملوں کا مشترک مقسوم علیہ عظم معلوم کرنے میں باقیوں کی علامتوں کو بدلنے یا نہ بدلنے سے کوئی ہرج واقع نہیں ہوتا لیکن اسٹرم کے امدادی تفاعل بنانے میں انکی تبدیلی لازمی ہے۔ اس لئے ہم آئندہ یہ فرض کر لیں گے کہ ہر باقی کی علامت اس کے مقسوم علیہ ہونے سے پیشتر بدل دی گئی ہے۔ فی الحال اس صورت کو لینے سے جس میں مساوی اصلیں موجود نہ ہوں



اسٹرم کا مسئلہ یوں بیان کیا جاسکتا ہے :-

مسئلہ :- فرض کرو کہ  $n + 1$  اتفاعلوں کے سلسلہ

$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), f(n+1)$

(199)

میں  $n$  کی بجائے کوئی دو حقیقی مقداریں  $1$  اور  $b$  درج کی گئی

ہیں جہاں سلسلہ بالا میں دیا ہوا اتفاعل  $f(1), f(2), \dots, f(n), f(n+1)$  اس کا پہلا

مشق  $f(1), f(2), \dots, f(n), f(n+1)$  اور  $f(1), f(2), \dots, f(n), f(n+1)$  کا مشترک

مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد دیگر آئیوں کے باقی

(بہ تبدیل علامت) شامل ہیں۔ تب سلسلہ بالا میں علامت

کی تبدیلیوں کی وہ تعداد جو  $n$  کی بجائے  $1$  درج کرنے سے

حاصل ہوتی ہے اور وہ تعداد جو  $n$  کی بجائے  $b$  درج کرنے

سے حاصل ہوتی ہے ان دونوں کا فرق 'مساوات'  $f(1), f(2), \dots, f(n), f(n+1)$ ۔

کی حقیقی اصلوں کی تعداد کو جو  $1$  اور  $b$  کے درمیان واقع

ہیں ٹھیک طور پر بیان کرتا ہے۔

اسٹرم کے اتفاعلوں کو بنانے کے طریقہ سے مساواتوں کا

حسب ذیل سلسلہ ملتا ہے جس میں  $q, q^2, q^3, \dots, q^n, q^{n+1}$  وہ

خارج قسمت ہیں جو مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں یکے بعد

دیگرے حاصل ہوتے ہیں :-



$$\begin{aligned} & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - ق م (لا)} \\ & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - ق م (لا)} \\ & \dots \\ & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - ق م (لا)} \\ & \dots \\ & \text{ف (لا) = ق ف (لا) - ق م (لا)} \end{aligned}$$

(۱)

ان مساواتوں میں مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے طریقہ کا نظریہ شامل ہے۔ کیونکہ پہلی مساوات سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) میں کوئی جزو ضربی مشترک ہو تو اسکو ف (لا) کا ایک جزو ضربی ہونا چاہئے، اور دوسری مساوات سے اسی طرح کے استدلال سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہی جزو ضربی ف (لا) میں بھی واقع ہونا چاہئے، ورنہ علیٰ ہذا یہاں تک کہ ہم آخری باقی پر پہنچ جائیں جو ف (لا) اور ف (لا) میں مشترک اجزاء کے ضربی ہونے کی صورت میں ایسا کثیر الارقام ہوگا جس میں یہ اجزاء ضربی شامل ہونگے۔ اس دفعہ میں جہاں ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ دے ہوئے کثیر الارقام اور اس کے پہلے مشتق تفاعل میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں ہے آخری باقی ف (لا) عددی ہوگا۔ مسئلہ کے ثبوت کے لئے اس بات کا مشاہدہ کرنا بھی لازمی ہے کہ زیر بحث صورت میں سلسلہ کے کوئی دو متصل تفاعل کوئی مشترک جزو ضربی نہیں رکھتے کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ہم اسی طرح کے استدلال سے جو اوپر استعمال ہوا مندرجہ بالا مساواتوں کے ذریعہ یہ ثابت کر سکتے کہ اس جزو ضربی کو ف (لا) اور ف (لا) میں بھی موجود ہونا چاہئے اور ایسی صورت ہمارے مفروضہ کے خلاف ہے۔ پس لاکھ لاکھ سے بے تک جانے میں سلسلہ بالا میں علامت کی جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوئی ہیں ان کا امتحان کرتے وقت



(200)

ہم وہ صورت خارج کر سکتے ہیں جس میں دو متصل تفاعل متغیر کی ایک ہی قیمت کے لئے معدوم ہوتے ہیں چنانچہ وہ مختلف صورتوں میں جنہیں علامت کی کوئی تبدیلی واقع ہو سکتی ہے ذیل میں درج کی جاتی ہیں۔

(۱) جب 'لا' مجوزہ مساوات  $f(لا) =$  کی ایک اصل میں سے گزرے

(۲) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گزرے جو اعدادی تفاعلوں

ف، ف، ف، ...، ف میں سے ایک کو صفر بناتی ہے۔

(۳) جب 'لا' ایسی قیمت میں سے گزرے جو سلسلہ

ف، ف، ف، ...، ف میں سے دو یا زیادہ تفاعلوں کو

صفر بناتی ہے بشرطیکہ معدوم ہونیوالے دو تفاعل متصل نہ ہوں۔

(۱) جب 'لا' مساوات  $f(لا) =$  کی ایک اصل میں

سے گزرتا ہو تو دفعہ ۵ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ علامت کی ایک تبدیلی

کم ہو جاتی ہے کیونکہ گزرنیکے عین قبل  $f(لا)$  اور  $f(لا)$  مختلف

علامتیں رکھتے ہیں اور گزرنیکے عین بعد موافق علامتیں۔

(۲) فرض کرو کہ لا کی قیمت  $e$  سے مساوات  $f(لا) =$

پوری ہوتی ہے تو مساوات

$$f(لا) = f(لا) - f(لا)$$

$$f(لا) = f(لا) - f(لا)$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ لا کی اس قیمت سے  $f(لا)$  اور

$f(لا)$  کی عددی قیمت ایک ہی ہوتی ہے مگر مختلف



علامتوں کے ساتھ۔ ع سے ذرا کم قیمت سے ذرا بڑی قیمت تک گزرنے میں ہم اس وقفہ کو اتنا چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ اس میں ف (لا) یا ف (لا) کی کوئی اصل شامل نہ ہو۔ اس لئے زیر بحث پورے وقفہ میں یہ دونوں تفاعل اپنی اپنی علامتیں برقرار رکھتے ہیں۔ اگر ف (لا) کی علامت نہ بدلے (اور یہ بات اس مستثنیٰ صورت میں واقع ہوگی جب اصل ع جفت مرتبہ تکرار پاتی ہو) تو علامتوں کے سلسلہ میں کوئی تغیر نہ ہوگا۔ عموماً ف (لا) کی علامت بدلیگی لیکن اس سے تینوں تفاعلوں کے جٹ میں نہ تو علامت کے کسی تغیر کا اضافہ ہوگا نہ کمی کیونکہ ف (لا) اور ف (لا) میں علامتوں کا اختلاف ہونے کی وجہ سے گزرنے کے عین قبل اور عین بعد دونوں صورتوں میں علامت کا ایک تغیر اور ایک استقلال موجود ہوگا خواہ درمیانی تفاعل ف (لا) کی علامت کچھ بھی ہو۔ مثلاً اگر گزرنے کے قبل علامتیں ++ - - ہوں تو گزرنے کے بعد یہ ++ - - ہو جائیں گی یعنی ایک تغیر اور ایک استقلال اور ایک استقلال اور ایک تغیر میں بدل گئے ہیں لیکن علامت کے تغیر و تکی تعداد میں بحیثیت مجموعی کوئی کمی بیشی نہیں ہوئی۔

(201)

(۳) پچھلی صورتوں میں استقلال کی بنیاد چونکہ صرف ان روابط پر رکھی گئی ہے جو ایک تفاعل کو اس کے متصلہ تفاعل کے ساتھ ہوتے ہیں اور چونکہ یہ روابط موجودہ صورت میں غیر متبدل رہتے ہیں کیونکہ کوئی دو متصلہ تفاعل یا ہم معدوم نہیں ہوتے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ف (لا) معدوم ہو تو اسے تفاعلوں میں سے ایک تفاعل ہو تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور اگر ف (لا) معدوم نہ ہو تو علامت کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوئی ہے نہ زیادہ



پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ جب 'لا' مساوات ف (لا) = کی ایک اصل میں سے گزرتا ہے تو علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور کسی دوسرے حالات کے تحت علامت کی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ اس لئے لا کے 'ا' سے ب تک جانے میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد 'ا' اور ب کے درمیان مساوات کی اصلوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

مساوی اصلوں کی صورت پر غور کرنے سے پیشتر ہم اسٹرم کے مسئلہ کو چند سادہ مثالوں سے واضح کرینگے۔ علامتوں کی اصلوں میں ہے کہ اسٹرم کے تفاضلوں میں لا کی بجائے پہلے  $\infty$ ،  $\infty$ ،  $\infty$  +  $\infty$  درج کیا جائے تاکہ منفی اور مثبت اصلوں کی کل تعداد حاصل ہو جائے۔ منفی اصلوں کو جدا کر نیکی لئے اعداد صحیح - ۱، - ۲، - ۳، وغیرہ کو متواتر درج کرنا ہو گا۔ ہر ایک کہ ہم علامتوں کے اس سلسلہ پر پہنچ جائیں جو  $\infty$  کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ مثبت اصلوں کو جدا کر نیکی لئے ہم ۱، ۲، ۳، وغیرہ کا اندراج کرتے ہیں یہاں تک کہ علامتوں کا وہ سلسلہ حاصل ہو جائے جو  $\infty$  کے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

طالب علم کو یہ معلوم کرنے میں اکثر وقت ہوگی کہ اسٹرم کے سلسلہ میں کم شدہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد کو کس طرح محفوظ کیا جاسکتا ہے کیونکہ جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ صرف پہلے دو تفاضلوں ف (لا) اور ف (لا) کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس وقت کو دور کر نہیں اس بات سے مدد مل سکتی ہے کہ جب 'لا' ف (لا) = کی ایک اصل 'ع' سے دوسری اصل یہ تک بڑھتا ہے تو اگرچہ علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہوتا لیکن ف (لا) اور بعد کے تفاضلوں میں علامتوں کی تقسیم اس طور پر بدلتی ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) کی علامتیں جو لا کے 'ع' میں سے گزرنیکے عین بعد ایک ہی تھیں یہ گزرنیکے عین قبل پہر مختلف ہو جاتی ہیں۔



## مثالیں

۱۔ مساوات

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵ = ۰$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع معلوم کرو۔

یہاں  $ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا - ۵$ ،  $ف (لا) = لا^۲ + لا - ۱۵$ ،  $ف (لا) = لا^۳ - ۶۴۳$

لا کی قیمتوں -  $\infty$ ،  $\infty$  کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

$$(-\infty) \quad - \quad - \quad + \quad -$$

$$(0) \quad - \quad + \quad - \quad -$$

$$(+\infty) \quad - \quad + \quad + \quad +$$

پس صرف ایک حقیقی اصل ہے اور وہ مثبت ہے۔

پھر لا کی قیمتوں ۱، ۲، ۳ کے جواب میں ہم حاصل کرتے ہیں

$$(1) \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$(2) \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$(3) \quad - \quad + \quad + \quad +$$

اسلئے یہ حقیقی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا - ۷ = ۰$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع معلوم کرو۔

ہم بہ آسانی حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = لا^۳ - لا^۲ - ۷$$

$$ف (لا) = لا^۲ - لا - ۳$$

$$ف (لا) = ۱$$



اور

$$+ - + - (\infty -)$$

$$+ - - + (0)$$

$$+ + + + (\infty +)$$

پس تمام اصلیں حقیقی ہیں، ایک منفی اور دو مثبت۔  
نیز ہمیں ذیل کے نتیجے ملتے ہیں:-

$$+ - + - (2 -)$$

$$+ - + + (3 -)$$

$$+ - + + (2 -)$$

$$+ - - + (1 -)$$

$$+ - - + (1)$$

$$+ + + + (2)$$

یہاں - ۴ اور + ۲ سے علامتوں کے وہی سلسلے ملتے ہیں جو  
-  $\infty$  اور +  $\infty$  سے حاصل ہوتے ہیں اور اسلئے ہم انہیں پر رک جاتے  
ہیں۔ منفی اصل - ۴ اور - ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دو مثبت  
اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان۔  
اس مثال سے فوریر کے مسئلہ پر اسٹرم کے مسئلہ کی فوقیت واضح  
ہو جاتی ہے۔

فوریر کے تفاعلوں میں ۱ اور ۲ کے اندراج سے علامتوں کے  
حسب ذیل سلسلے ملینگے جنکی تصدیق آسانی کے ساتھ کیجا سکتی ہے:-

$$+ + - + (1)$$

$$+ + + + (2)$$

اب فوریر کے مسئلہ سے ہم صرف یہ نتیجہ نکالنے کا حق رکھتے ہیں کہ

۱ اور ۲ کے درمیان دو سے زیادہ اصلیں نہیں ہو سکتیں۔ لیکن اسٹرم کے



مسئلہ سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ۱ اور ۲ کے درمیان دو اصلیں ہیں۔  
اگر ان اصولوں کو جدا کرنا مقصود ہو تو ہمیں ف (لا) میں مزید اندراجات  
کرنے چاہئیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^۱ - لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ - لا^۵ + لا^۶ - لا^۷ + لا^۸ - لا^۹ + لا^{۱۰} - لا^{۱۱} + لا^{۱۲} = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع دریافت کرو۔  
مشتق سے جزو ضربی ۲ کو علیحدہ کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + ۵$$

$$ف (لا) = لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱} + لا^{۱۲} + ۱۱$$

$$ف (لا) = لا^۸ - لا^۷ - لا^۶ + لا^۵ + ۳$$

$$ف (لا) = لا^{۱۲} - لا^{۱۱} - لا^{۱۰} + لا^۹ + ۱۲$$

(203)

[نوٹ:- جیسا کہ مساواتوں (۱) سے واضح ہے اسٹرم کے  
تفاعلوں کو بنانے میں اسکی اجازت ہے کہ عددی اجزائے ضربی کو داخل یا خارج  
کیا جائے بالکل اسی طرح جس طرح مقسوم علیہ اعظم نکالنے کے عمل میں لیکن  
اس بات کا خیال رہے کہ یہ اجزا مثبت ہوں تاکہ باقیوں کی علامتیں بدلنے  
نہ پائیں۔]

علامتوں کے حسب ذیل سلسلے ملینگے

$$(-\infty) \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$(0) \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad -$$

$$(+\infty) \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad -$$

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور ایک منفی اور دو اصلیں  
خیالی ہیں حقیقی اصولوں کا مقام معلوم کرنے کے لئے صرف ف (لا) میں مثبت  
اور منفی اعداد صحیح کو متواتر درج کرنا کافی ہے کیونکہ صرف ایک اصل  
مثبت اور ایک اصل منفی ہے۔ اس طریقہ سے ہمیں یہ آسانی یہ معلوم  
ہو جائیگا کہ منفی اصل - ۲ اور - ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے اور مثبت اصل



صفر اور ایک کے درمیان -

۹۷۔ اسٹرم کا مسئلہ - مساوی اصلیں - فرض کرو کہ

ف (لا) اور ف (لا) کا مشترک مقسوم علیہ اعظم نکالنے کا عمل پورا کروایا گیا ہے اور حسب سابق متواتر آئیوں والے باقیوں کی علامتیں بدل دی گئی ہیں اسٹرم کا آخری تفاعل موجودہ صورت میں عددی نہیں ہو گا کیونکہ یہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ف (لا) اور ف (لا) کا ایک مشترک جزو ضربی ایسا ہے جس میں لا شامل ہوتا ہے اور اسلئے یہی وہ آخری تفاعل ہو گا جو متذکرہ صدر عمل سے حاصل ہوتا ہے - فرض کرو کہ تفاعلوں کا سلسلہ

ہے

ف (لا) ، ف (لا) ، ف (لا) ، ... ، ف (لا)

اب ف (لا) = کی ضعفی اصل کے سوا لا جب کسی قیمت میں

سے گذرتا ہے تو دفعہ ماضی کے نتائج سلسلہ بالا پر بھی صادق آتے ہیں کیونکہ کوئی قیمت سوائے ضعفی اصل کے سلسلہ کے کسی دو متصل

تفاعلوں کو معدوم نہیں کر سکتی - لیکن جب 'لا' مساوات ف (لا) =

کی ایک ضعفی اصل میں سے گذرتا ہے تو دفعہ ۵ کے نتیجہ صریح کی رو سے

ف (لا) اور ف (لا) کے درمیان علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی

ہے اور اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ سلسلہ کے باقی دوسرے تفاعلوں یعنی

ف (لا) ، ف (لا) ، ... ، ف (لا) میں علامت کی کسی تبدیلی کا نہ اضافہ ہوتا

ہے نہ کمی - فرض کرو کہ ف (لا) کی ایک مضعفی اصل ع موجود ہے

تو دفعہ ۹۶ کی مساواتوں (۱) سے یہ ظاہر ہے کہ تفاعلوں ف (لا) ، ف (لا) ، ... (204)

..... ف (لا) سے ہر ایک میں (لا - ع) ایک جزو ضربی ہے

فرض کرو کہ ان تفاعلوں میں بقیہ اجزائے ضربی علی الترتیب ف (لا) ، ف (لا) ،

..... ف (لا) ہیں - مذکورہ بالا مساواتوں (۱) کو (لا - ع) سے تقسیم کرو تو



پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ 'ف' (لا) = کی ضعفی  
اصل میں سے گذرتا ہے تو 'ف' اور 'ف' کے درمیان علامت کی  
ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے اور سلسلہ کے کسی دوسرے حصہ میں علامت  
کی کوئی تبدیلی نہ کم ہوتی ہے نہ زیادہ۔ البتہ یہ بات درست رہتی  
ہے کہ 'ف' (لا) = کی ایک واحد اصل میں سے گذرتا ہے  
تو حسب سابق علامت کی ایک تبدیلی کم ہو جاتی ہے۔ اب ہم  
مساوی اصولوں کی صورت کے لئے اسٹرم کے مسئلہ کو یوں بیان  
کر سکتے ہیں :-

سلسلہ  
ف، ف، ف، ف، ف، ف

میں جب 'ا' اور ب درج کئے جائیں تو علامت کی تبدیلیوں کی  
تعدادوں کے درمیاں فرق 'ا' اور ب کے درمیاں حقیقی اصلوں کی  
تعداد کے مساوی ہوتا ہے یہاں آخری تفاعل 'ف' اور 'ق' کا



مشترک مقسوم علیہ اعظم ہے اور ہر ضعیفی اصل کو صرف ایک مرتبہ شمار کیا گیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۱ - ۵ لا^۳ + ۹ لا^۲ - ۷ لا + ۲ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔  
ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

$$ف (لا) = لا^۴ - ۱۵ لا^۲ + ۱۸ لا - ۷$$

$$ف (لا) = لا^۲ - ۲ لا + ۱$$

ف (لا) 'ف (لا) کو پوری طرح تقسیم کر دیتا ہے۔ پس اس صورت میں اسٹرم کا سلسلہ ف (لا) پر اگر رک جاتا ہے اور اس طرح مساوی اصلوں کے وجود کو ثابت کرتا ہے۔

(205) مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ہم تفاعلوں ف، ف، ف کے سلسلہ میں لا کی بجائے -∞ اور +∞ درج کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + + (\infty +)$$

پس مساوات کی صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ انہیں سے ایک تہری اصل ہے جیسا کہ ف (لا) کی شکل سے ظاہر ہے جو (لا - ۱) کے مساوی ہے۔

۲۔ مساوات

$$لا^۱ - ۶ لا^۳ + ۱۳ لا^۲ - ۱۲ لا + ۴ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔



یہاں

$$ف_۱ (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا^۱ + لا^۰ - لا^{-۱} - لا^{-۲} - لا^{-۳} - لا^{-۴} - لا^{-۵} - لا^{-۶} - لا^{-۷} - لا^{-۸} - لا^{-۹} - لا^{-۱۰} - لا^{-۱۱} - لا^{-۱۲} - لا^{-۱۳} - لا^{-۱۴} - لا^{-۱۵} - لا^{-۱۶} - لا^{-۱۷} - لا^{-۱۸} - لا^{-۱۹} - لا^{-۲۰} - لا^{-۲۱} - لا^{-۲۲} - لا^{-۲۳} - لا^{-۲۴} - لا^{-۲۵} - لا^{-۲۶} - لا^{-۲۷} - لا^{-۲۸} - لا^{-۲۹} - لا^{-۳۰} - لا^{-۳۱} - لا^{-۳۲} - لا^{-۳۳} - لا^{-۳۴} - لا^{-۳۵} - لا^{-۳۶} - لا^{-۳۷} - لا^{-۳۸} - لا^{-۳۹} - لا^{-۴۰} - لا^{-۴۱} - لا^{-۴۲} - لا^{-۴۳} - لا^{-۴۴} - لا^{-۴۵} - لا^{-۴۶} - لا^{-۴۷} - لا^{-۴۸} - لا^{-۴۹} - لا^{-۵۰} - لا^{-۵۱} - لا^{-۵۲} - لا^{-۵۳} - لا^{-۵۴} - لا^{-۵۵} - لا^{-۵۶} - لا^{-۵۷} - لا^{-۵۸} - لا^{-۵۹} - لا^{-۶۰} - لا^{-۶۱} - لا^{-۶۲} - لا^{-۶۳} - لا^{-۶۴} - لا^{-۶۵} - لا^{-۶۶} - لا^{-۶۷} - لا^{-۶۸} - لا^{-۶۹} - لا^{-۷۰} - لا^{-۷۱} - لا^{-۷۲} - لا^{-۷۳} - لا^{-۷۴} - لا^{-۷۵} - لا^{-۷۶} - لا^{-۷۷} - لا^{-۷۸} - لا^{-۷۹} - لا^{-۸۰} - لا^{-۸۱} - لا^{-۸۲} - لا^{-۸۳} - لا^{-۸۴} - لا^{-۸۵} - لا^{-۸۶} - لا^{-۸۷} - لا^{-۸۸} - لا^{-۸۹} - لا^{-۹۰} - لا^{-۹۱} - لا^{-۹۲} - لا^{-۹۳} - لا^{-۹۴} - لا^{-۹۵} - لا^{-۹۶} - لا^{-۹۷} - لا^{-۹۸} - لا^{-۹۹} - لا^{-۱۰۰}$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا^۱ + لا^۰ - لا^{-۱} - لا^{-۲} - لا^{-۳} - لا^{-۴} - لا^{-۵} - لا^{-۶} - لا^{-۷} - لا^{-۸} - لا^{-۹} - لا^{-۱۰} - لا^{-۱۱} - لا^{-۱۲} - لا^{-۱۳} - لا^{-۱۴} - لا^{-۱۵} - لا^{-۱۶} - لا^{-۱۷} - لا^{-۱۸} - لا^{-۱۹} - لا^{-۲۰} - لا^{-۲۱} - لا^{-۲۲} - لا^{-۲۳} - لا^{-۲۴} - لا^{-۲۵} - لا^{-۲۶} - لا^{-۲۷} - لا^{-۲۸} - لا^{-۲۹} - لا^{-۳۰} - لا^{-۳۱} - لا^{-۳۲} - لا^{-۳۳} - لا^{-۳۴} - لا^{-۳۵} - لا^{-۳۶} - لا^{-۳۷} - لا^{-۳۸} - لا^{-۳۹} - لا^{-۴۰} - لا^{-۴۱} - لا^{-۴۲} - لا^{-۴۳} - لا^{-۴۴} - لا^{-۴۵} - لا^{-۴۶} - لا^{-۴۷} - لا^{-۴۸} - لا^{-۴۹} - لا^{-۵۰} - لا^{-۵۱} - لا^{-۵۲} - لا^{-۵۳} - لا^{-۵۴} - لا^{-۵۵} - لا^{-۵۶} - لا^{-۵۷} - لا^{-۵۸} - لا^{-۵۹} - لا^{-۶۰} - لا^{-۶۱} - لا^{-۶۲} - لا^{-۶۳} - لا^{-۶۴} - لا^{-۶۵} - لا^{-۶۶} - لا^{-۶۷} - لا^{-۶۸} - لا^{-۶۹} - لا^{-۷۰} - لا^{-۷۱} - لا^{-۷۲} - لا^{-۷۳} - لا^{-۷۴} - لا^{-۷۵} - لا^{-۷۶} - لا^{-۷۷} - لا^{-۷۸} - لا^{-۷۹} - لا^{-۸۰} - لا^{-۸۱} - لا^{-۸۲} - لا^{-۸۳} - لا^{-۸۴} - لا^{-۸۵} - لا^{-۸۶} - لا^{-۸۷} - لا^{-۸۸} - لا^{-۸۹} - لا^{-۹۰} - لا^{-۹۱} - لا^{-۹۲} - لا^{-۹۳} - لا^{-۹۴} - لا^{-۹۵} - لا^{-۹۶} - لا^{-۹۷} - لا^{-۹۸} - لا^{-۹۹} - لا^{-۱۰۰}$$

ف<sub>۳</sub> (لا) اسٹرم کا آخری تفاعل ہے اور اس کے مساوات کی مساوی اصلیں موجود ہیں۔

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + + (\infty +)$$

صرف دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں اور چونکہ ف<sub>۳</sub> (لا) = (لا - ۱)(لا - ۲) (۲ - لا) اصلوں ۱ اور ۲ میں سے ہر ایک دوہری اصل ہے۔

۳ - مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

کی اصلوں کی نوعیت دریافت کرو۔

یہاں

$$ف_۱ = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۲ = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۳ = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۴ = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

$$ف_۵ = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - ۱$$

چونکہ ف<sub>۵</sub> = ف<sub>۱</sub> اور ف<sub>۱</sub> کا مشترک مقسوم علیہ اعظم لا + ۱ ہے اور

ف (لا) کی ایک دوہری اصل - ۱ ہے۔ نیز

$$+ - - + - (\infty -)$$

$$- - + + + (\infty +)$$

پس دو حقیقی جداگانہ اصلیں ہیں۔ اس کے مساوات کی دوہری اصل کے سوا ایک دوسری حقیقی اصل ہے اور دو اصلیں خیالی ہیں۔

۴ - مساوات



$$لا - ۷ لا + لا ۱۵ - لا ۴۰ + لا ۴۸ - لا ۱۶ = -$$

کی اصلوں کی نوعیت معلوم کرو۔

یہاں

$$ف (لا) = لا ۶ - لا ۳۵ + لا ۶۰ - لا ۸۰ + لا ۴۸$$

$$ف (لا) = لا ۱۳ - لا ۸۴ + لا ۱۹۲ - لا ۱۷۶ + لا ۴۸$$

$$ف (لا) = لا ۶ - لا ۱۲ + لا ۸ - لا ۲ = ۲$$

اصل

جواب بہ تین جداگانہ حقیقی اصلیں انہیں سے ایک چوہری

۹۸۔ اسٹرم کے مسئلہ کا استعمال۔ اعلیٰ درجہ کی مساواتوں کی (200)

صورت میں اسٹرم کے امدادی تفاعلوں کو محسوب کر نیک عمل اکثر بہت محنت طلب ہو جاتا ہے۔ اسلئے چند ایسے نکات کو پیش نظر رکھنا ضروری ہے جنکی مدد سے اس محنت میں تخفیف ہونے کا امکان ہے۔

(۱) آخری باقی محسوب کرنے میں جبکہ وہ عددی ہو چونکہ صرف

اسکی علامت سے ہمیں واسطی پڑتا ہے اس لئے آخری عمل تقسیم سے اہم بچ سکتے ہیں کیونکہ لاکھ کی وہ قیمت جو ف کو معدوم کرتی ہے ف

ن-۲

اور فن کو مختلف علامت بنا دیتی ہے۔ عموماً بغیر کسی عمل حساب کے یہ بتانا ممکن ہے کہ اگر ف (لا) = کی اصل کو ف (لا) میں

درج کیا جائے تو حاصل کی علامت کیا ہوگی۔ چنانچہ دفعہ ۹۶ مثال ۳ میں اگر ف (لا) = کی اصل - ۳ کو ۹ لا - ۲۷ لا + ۱۱ لا کی بجائے

درج کیا جائے تو حاصل کی علامت صریحاً مثبت ہے پس ف (لا) کی علامت منفی ہے اور اس لئے لاکھ کی قیمت - ۳ کے جواب میں



فن (۱) کی قیمت - ۱۴۳۳ کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں۔  
 (۲) جب کسی طرح سے یہ پہچان لینا ممکن ہو کہ اسٹرم کے  
 تفاعلوں میں سے کسی ایک کی سب اصلیں خیالی ہیں تو کسی اور تفاعل  
 کو اس تفاعل کے آگے محسوب کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی کیونکہ ایسا  
 تفاعل متغیر کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ ایک ہی علامت برقرار  
 رکھتا ہے (دفعہ ۱۲ نتیجہ صریح) اور اس لئے اسکی اور اسکے بعد آنوالے  
 تفاعلوں کی علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کبھی بھی کوئی تغیر وقوع پذیر  
 نہیں ہو سکتا چنانچہ جب دو مقداریں ۱ اور ۲ درج کیجائی ہیں تو  
 تبدیلیوں کی تعداد میں جو فرق ہوتا ہے وہ علامت کے ان تغیرات پر  
 منحصر نہیں ہوتا جو سلسلہ کے اس حصہ میں موجود ہو سکتی ہیں جس میں  
 زیر بحث تفاعل اور اس کے بعد آنوالے تفاعل شامل ہیں۔ اس نتیجہ  
 کو استعمال کرنے میں ہمیشہ مناسب یہ ہے کہ جب ہم دو درجی تفاعل  
 (مثلاً ۱ لا + ۲ ب + ۱ ج) پر پہنچیں تو اس بات کا امتحان کر لیں کہ لا  
 والی رقم اور مطلق رقم ہم علامت ہونے کی صورت میں (اگر ایسا نہیں  
 ہے تو اصلیں خیالی نہیں ہو سکتیں) آیا شرط ۴ ج < ۲ ب پوری  
 ہوتی ہے یا نہیں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہو تو ہم جانتے ہیں کہ اصلیں  
 خیالی ہونگی اور عمل حساب کو آگے بڑھانے کی ضرورت نہیں۔  
 جب تفاعلوں میں سے کوئی ایک کامل مربع ہو تو اس صورت  
 پر بھی اوپر کے نتائج کا اطلاق ہوتا ہے کیونکہ ایسا تفاعل لا کی حقیقی قیمتوں  
 کے لئے اپنی علامت نہیں بدلتا۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$۱ لا + ۳ لا + ۱ لا + ۱ لا = ۱$$

کا تجزیہ کرو۔



ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف^۴(لا) = -۲۹ لا^۲ - ۸ لا + ۱۴$$

$$ف^۳(لا) = -۸۶ لا - ۸۱$$

$$ف^۲(لا) = -$$

یہاں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا کی وہ قیمت جو مساوات  $ف^۴(لا) = ۰$  سے حاصل ہوتی ہے اور جو  $\frac{۱}{۲}$  سے بہت چھوٹا فرق رکھتی ہے  $ف^۴(لا)$  کو مثبت بناتی ہے۔ پس  $ف^۴(لا)$  منفی ہے۔ مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ حقیقی اصلیں وقفوں  $(۱-۲)$ ،  $(۱-۱)$  میں واقع ہوتی ہیں۔

۲۔ مساوات

$$لا^۴ - ۴ لا^۳ - ۳ لا + ۲۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف^۴(لا) = ۱۲ لا^۲ + ۹ لا - ۸۹$$

$$ف^۳(لا) = ۹۱ لا + ۱۳۷۱$$

$$ف^۲(لا) = -$$

یہاں  $ف^۴(لا) = ۰$  سے حاصل ہوتا ہے  $لا = \frac{۱۳۷۱}{۹۱} < \frac{۱۳۷۱}{۵۰۰}$

$\frac{۵}{۲} < ۲.۵ < \frac{۵}{۲}$  اور  $لا = \frac{۵}{۲}$ ،  $ف^۴(لا)$  کو مثبت بناتا ہے۔ اس لئے

$ف^۴(لا)$  کی اصل بھی اس کو مثبت بناتی ہے۔

مساوات کی دو اصلیں حقیقی ہیں اور دو خیالی۔ حقیقی اصلیں وقفوں

$(۲، ۳)$ ،  $(۳، ۴)$  میں واقع ہوتی ہیں۔

۳۔ مساوات

$$لا^۴ - ۳ لا^۳ + ۱۰ لا - ۱۹ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں



$$ف_۱ (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا + ۵$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا + ۳۸$$

چونکہ  $۳۸ \times ۱۳ \times ۲ < ۲۱۵$ ،  $ف_۲ (لا)$  کی اصلیں خیالی ہیں اسلئے ہم اسٹرم کے یقیہ تفاعلوں کو محسوب نہیں کرتے۔

$$- \infty - \infty + \infty \text{ درج کرنے سے}$$

$$+ - + (\infty -)$$

$$+ + - (0)$$

$$+ + + (\infty +)$$

پس دو اصلیں حقیقی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی۔

۴۔ مساوات

$$ف (لا) \equiv لا^۵ + لا^۲ + لا^۳ - لا^۲ - لا^۳ - لا - ۵ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

$$ف_۱ (لا) = لا^۵ + لا^۳ + لا^۲ - لا - ۳$$

$$ف_۲ (لا) = لا^۶ + لا^۴ + لا^۲ + ۱۱۹$$

$$ف_۳ (لا) = لا^۱۱۶ - لا^۵ - ۲۲۳$$

چونکہ  $۲۲۳ \times ۱۱۶ \times ۳ < ۲۵۷$ ، باقی تفاعلوں کو معلوم کرنے کی ضرورت نہیں۔

$$- \infty - \infty + \infty \text{ درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ}$$

$$- - + - (\infty -)$$

$$- + - - (0)$$

$$- + + + (\infty +)$$

چار اصلیں خیالی ہیں اور ایک حقیقی مثبت اصل۔

۵۔ مساوات

$$لا^۴ - لا^۲ - لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱۰ = ۰$$

کی حقیقی اصلوں کی تعداد اور انکا محل وقوع معلوم کرو۔

جواب :- سب اصلیں حقیقی ہیں دو اصلیں تقوں (۲-۳)۔



(۱۔) میں اور دو اصلیں (۳، ۲) کے درمیان واقع ہوتی ہیں

۶۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہ معلوم ہو جائیگا کہ عمل حساب دو درجہ باقی پر پہنچتے ہی ختم ہو جاسکتا ہے۔  
جواب :- صرف ایک اصل حقیقی ہے وقفہ (۲، ۱) میں۔

۷۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں

$$ف۲ (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۰$$

$$ف۳ (لا) = لا^۳ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ = ۰$$

بعض مثالوں میں جیسا کہ اوپر کی مثال سے ظاہر ہے فوراً یہ کہنا آسان نہیں ہوتا کہ ایک تفاعل کی اصل سے اس کے باقی تفاعل کی علامت کیا ہو جائیگی۔ ہم نے یہاں ف۲ (لا) کو محسوب کیا اور وہ بہت چھوٹا عدد نکلا حالانکہ ف۲ (لا) کے سروں کی مقدار سے ف۲ (لا) کے لئے اس سے بڑے عدد کی توقع ہوتی تھی۔ واقعہ یہ ہے کہ اگر ہم ف۲ (لا) کی اصل کو ف۲ (لا) میں درج کریں تو مثبت حصہ تقریباً منفی حصہ کے مساوی حاصل ہوتا ہے۔ یہ ہمیشہ اس بات کی علامت ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہیں۔ موجود

مثال میں ۳ اور ۴ کے درمیان دو مثبت اصلیں ہیں۔ اس وقفہ کو مزید وقفوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ دونوں اصلیں پھر بھی ۳، ۳ اور ۳، ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور اس لئے یہ دونوں باہم بہت قریب ہیں۔ حقیقی اور خیالی اصلوں کے درمیان جو تسلسل پایا جاتا ہے اسکی یہ دوسری تمثیل ہے (دیکھو دفعات ۱۸، ۱۷)۔ اگر ف۲ (لا) صفر ہوتا تو یہ دونوں اصلیں مساوی ہوتیں اور اگر وہ چھوٹا منفی عدد ہوتا تو یہ اصلیں خیالی ہوتیں۔



۸۔ مساوات

$$0 = 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^4 + \lambda^5$$

کا تجزیہ کرو۔

عمل سے معلوم ہوتا ہے کہ دو درجی تفاعل کی اصلیں خیالی ہیں۔

جواب :- ایک حقیقی اصل (۰، ۱) کے درمیان۔ چار خیالی  
اصلیں۔

۹۔ مساوات

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8$$

کا تجزیہ کرو۔

یہاں  
اور چونکہ اس کی سب اصلیں خیالی ہیں، عمل حساب یہاں پہنچ کر ختم کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- دو حقیقی اصلیں (۰، ۱) (۱، ۲) وقفوں میں واقع ہیں۔

۱۰۔ مساوات

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8 - 10\lambda^9$$

کا تجزیہ کرو۔

ہمیں معلوم ہوگا

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8 - 10\lambda^9$$

اور عمل حساب یہاں ختم ہو سکتا ہے۔

جواب :- دو حقیقی اصلیں (۰، ۱) (۱، ۲) وقفوں میں واقع ہیں۔

۱۱۔ امتحان کرو کہ کس طرح مساوات

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8 - 10\lambda^9 + 11\lambda^{10}$$

کی اصلیں، اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ کے درمیان مختلف وقفوں میں واقع ہوتی ہیں۔

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8 - 10\lambda^9 + 11\lambda^{10}$$

یہاں

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8 - 10\lambda^9 + 11\lambda^{10}$$

$$0 = 1 - 2\lambda + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 5\lambda^4 - 6\lambda^5 + 7\lambda^6 - 8\lambda^7 + 9\lambda^8 - 10\lambda^9 + 11\lambda^{10}$$



مندرجہ بالا مقداروں کے اندراج سے حال ہوگا

$$+ - + - (\infty -)$$

$$+ - 0 + (-)$$

$$+ + + + (6)$$

$$+ + + + (\infty +)$$

جب کبھی (جس طرح کہ موجودہ مثال میں) کوئی مقدار امدادی تفاعلوں میں سے ایک تفاعل کو صفر بنا دے (یہاں ف (لا) = ۰ کو - ۷ پورا کرتا ہے) تو صفر جس صف میں ہے اس میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد شمار کرنے میں صفر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے کیونکہ اسکی ہر جانب کی علامتیں مختلف ہونے کی وجہ سے صف میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد میں کوئی تغیر واقع نہیں ہو سکتا خواہ معدوم ہونیوالی مقدار کی علامت کو منسی بھی فرض کر لیا جائے۔ سب اصلیں حقیقی ہیں۔ ایک اصل - ۵ اور - ۷ کے درمیان۔ دو اصلیں - ۷ اور ۶ کے درمیان۔

۱۲ - مساوات

$$۳ - لا - ۶ - لا - ۸ - لا - ۳ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

$$۲ - لا - ۳ - لا - ۳ = ۰$$

یہاں

$$۲ - لا - ۳ - لا - ۳ = ۰$$

چونکہ ف (لا) کامل مربع ہے، عمل حساب ختم کیا جاسکتا ہے۔  
جواب :- دو حقیقی اصلیں، وقفوں (-۱، ۰) (۰، ۱) میں واقع ہیں۔

۹۹ - مساوات کی اصولوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں۔ اسٹرم

کے تفاعلوں کی تعداد جب اس میں ف (لا) ف (لا) اور ن - ۱ باقیوں کو شامل کیا جائے عام طور پر ن + ۱ ہوگی۔ بعض صورتوں میں مجوزہ مساوات میں چند رقبوں کی عدم موجودگی کی وجہ سے چند باقی



موجود نہیں ہونگے۔ یہ صرف اس وقت واقع ہو سکتا ہے جب مجوزہ مساوات میں خیالی اصلیں ہوں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ لا کے  $\infty$  سے  $\infty$  تک جانے میں تفاعلوں کے سلسلہ میں علامت کی  $n$  تبدیلیوں کا نقصان ہونے کے لئے سب تفاعلوں کا موجود ہونا ضروری ہے۔ اور مزید یہ کہ یہ سب تفاعل ایک ہی علامت اختیار کریں جبکہ لا  $\infty$  اور متبادل علامتیں جبکہ لا  $= -\infty$ ۔ اب چونکہ مساوات کی پہلی رقم کو ہمیشہ مثبت علامت کے ساتھ لیا جاتا ہے اس لئے کسی مساوات کی سب اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرط کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے:۔  $n$  ویں درجہ کی مساوات کی سب اصلیں حقیقی ہونیکے لئے اسٹرم کے تمام باقیوں کے صدر سر جو تعداد میں  $n$ ۔ ان میں مثبت ہونے چاہئیں۔

## مثالیں

۱۔ وہ شرط معلوم کرو کہ مساوات

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

کی اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جواب:۔  $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$

۲۔ وہ شرطیں معلوم کرو کہ کبھی

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

کی سب اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوں۔

جب اس کبھی کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو یہ ظاہر ہے کہ یہ کبھی جس عام

کبھی سے اخذ کیا گیا ہے اسکی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں۔ اس لئے عام کبھی

کی اصلوں کے حقیقی ہونے کی شرطیں معلوم کرنے میں مندرجہ بالا شکل پر بحث

کرنا کافی ہے۔



ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ف_۱ (ی) = ی^۱ + ھ$$

$$ف_۲ (ی) = ۲ھ - ی - گ$$

$$ف_۳ (ی) = - (گ + ۲ھ^۲)$$

[انکو محسوب کرنے میں  $ف_۱ (ی)$  کو  $ف_۲ (ی)$  سے تقسیم کرنے سے قبل  $ف_۱ (ی)$  کو مثبت جزو ضربی  $۲ھ$  سے ضرب دو۔]۔  
پس مطلوبہ شرطیں ہیں  $ھ$  منفی اور  $گ + ۲ھ^۲$  منفی۔  
ان کو ایک شرط میں بیان کیا جاسکتا ہے یعنی  $گ + ۲ھ^۲$  منفی،  
کیونکہ اس سے  $ھ$  کا منفی ہونا لازم آتا ہے (دیکھو دفعہ ۴۳)۔

۳۔ چار درجہ

(211)

$$ی^۴ + ۶ھ ی^۳ + ۴گ ی^۲ + ۴ع ی - ۳ھ^۳ = ۰$$

کے لئے اسٹرم کے باقی محسوب کرو۔

ہم معلوم کرتے ہیں

$$ف_۱ (ی) = ۳ھ ی^۳ - ۳گ ی - (۴ع ی - ۳ھ^۳)$$

$$ف_۲ (ی) = - (۲ھ ع - ۳گ ی - ۳ھ^۳)$$

$$ف_۳ (ی) = ۴ع - ۲ھ^۲$$

انکو دفعہ ۳ کی مثال کی مدد سے آسانی کے ساتھ حاصل کیا جاسکتا ہے۔  
 $ف_۱$  کو  $ف_۲$  سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی  $۳ھ$  سے ضرب دو  
اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی  $۴ع$  کو جدا کر دو۔  $ف_۱$  کو  
 $ف_۲$  سے تقسیم کرنے سے پیشتر مثبت جزو ضربی  $(۲ھ ع - ۳گ ی - ۳ھ^۳)$  سے  
ضرب دو اور جب باقی معلوم ہو جائے تو مثبت جزو ضربی  $۴ع$  کو جدا کر دو۔

۱۰۰۔ چار درجہ کی اصلوں کے حقیقی ہونیکے لئے شرطیں۔

چوتھے درجہ کی عام جبری مساوات کی اصلوں کی نوعیت کو جاننے کے  
معیار اسٹرم کے طریقہ سے حاصل کرنے کے لئے دفعہ ۳ کی مثال ۳ کی







کی اصولوں کو جدا کرنے میں بودان کا طریقہ استعمال کرو۔  
جواب :- اسکی اصلیں وقفوں (-۱، ۰)، (۲، ۳)، (۴، ۵)، (۹، ۱۰) میں ہیں۔

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ + لا - لا^۰ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو۔  
اس قسم کے چار درجی کا تجزیہ کرنے میں جس کی دو اصلیں صریحاً حقیقی ہیں ہم عمل حساب کو اس وقت ختم کر سکتے ہیں جب اسٹرم کا وہ باقی باقی حال ہو جائے جس کی صدر رقم کا منفرقی ہے کیونکہ ایسی صورت میں اصولوں کے دوسرے زوج کو خیالی ہونا چاہئے اور حقیقی اصولوں کے مقامات دی ہوئی مساوات میں اندراج کے ذریعہ آسانی کے ساتھ معلوم کئے جا سکتے ہیں۔

جواب :- دو اصلیں خیالی دو حقیقی اصلیں وقفوں (-۱، ۰)، (۲، ۳) میں

۳۔ اسی طریقہ پر مساوات

$$لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - لا^۰ = ۰$$

کا تجزیہ کرو۔

جواب :- دو اصلیں خیالی دو حقیقی، وقفوں (-۱، ۰)، (۳، ۴) وقفوں میں

۴۔ مساوات

$$لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا + لا^۰ = ۰$$

کے تجزیہ میں اسٹرم کا مسئلہ استعمال کرو۔

جواب :- سب اصلیں خیالی۔

۵۔ اسٹرم کے طریقہ سے مساوات

$$لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + لا^۰ = ۰$$

کی حقیقی اصولوں کی تعداد اور ان کا محل وقوع دریافت کرو۔

جواب :- سب اصلیں حقیقی۔ ایک اصل وقفہ (-۲، -۳) میں

دو اصلیں وقفہ (-۱، ۰) میں اور دو مثبت اصلیں وقفوں (۱، ۲)، (۳، ۴) میں



۶۔ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ سب اصلیں حقیقی ہیں :-

$$۱ - ۵ - ۵ + ۵ + ۵ - ۱ = ۰$$

۷۔ ذیل کی مساوات کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور بتاؤ کہ چار اصلیں خیالی ہیں :-

$$۳ - ۵ + ۵ + ۲ = ۰$$

طالب علم بہ آسانی دیکھ لگا کہ یہ مثال اور مثال مابق ایسی مثالیں ہیں جنہیں ایک جزو ضربی ہے جو اسٹرم کے دو غیر متصل باقیوں میں مشترک ہے

۸۔ مساوات ذیل کے لئے اسٹرم کے تفاعلوں کو محسوب کرو اور اصلوں کی نوعیت کے متعلق مثال ۳ صفحہ ۱۵۳ کے نتیجوں کی تصدیق کرو :-

$$۱ - ۵ - ۵ + ۵ + ۲ = ۰$$

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ج کی ایک کے سوا کوئی قیمت ہو تو مساوات

(213)

$$۱ - ۵ - ۵ + ۵ + ۲ = ۰$$

کی اصلوں کا ایک زوج خیالی ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۱ - ۵ - ۵ + ۵ + ۲ = ۰$$

کی سب اصلیں حقیقی ہیں۔ اس کو حل کرو جب مقداروں 'ا'، 'ب'، 'ج' میں سے دو مساوی ہو جائیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ جب چار درجی

$$۱ - ۵ - ۵ + ۵ + ۲ = ۰$$

کا ایک جزو ضربی تہرا ہو تو اس کو شکل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے :-

$$۱ - ۵ - ۵ + ۵ + ۲ = ۰$$

۱۲۔ اسٹرم کے باقیوں کے ذریعہ ان شرطوں کی تصدیق کرو جنکو پورا ہونا چاہئے جبکہ مثال مابق کا چار درجی کامل مربع ہو اور اس صورت میں ثابت کرو کہ



$$ا ف (لا) = (ا + ب) + ۳ ه$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ جب اسٹرم کے سب تفاعل موجود ہوں تو ان تفاعلوں کی صدر رقموں کے سروں میں علامت کی تبدیلیوں کی تعداد مساوات کی خیالی اصلوں کے زوجوں کی تعداد کے مساوی ہوتی ہے۔

۱۴۔ اگر پانچ درجہ کے لئے اسٹرم کے باقیوں میں سے پہلے دو کی صدر رقموں کی علامتیں - + ہوں تو ثابت کرو کہ حقیقی اصلوں کی تعداد متغیر ہو جاتی ہے۔  
جواب :- صرف ایک اصل حقیقی۔

۱۵۔ اگر ه اور جے دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ چار درجہ کی سب اصلیں خیالی ہیں اور یہ کہ انہی شرطوں کے تحت پانچ درجہ کی صرف ایک اصل حقیقی ہوتی ہے جب اس کو ثنائی سروں کے ماتحت لکھا جائے۔  
(سٹرایم۔ رابرٹس، ڈیٹن انزافیشن پیپر ۸۸۲ء ۶)

۱۶۔ اسٹرم کے مسئلہ کے استعمال میں اگر ایسا تفاعل مل جائے جس کی علامتیں سب کی سب مثبت ہیں یا سب کی سب منفی تو ابتدائی مساوات کی مثبت اصلوں کی تعداد اور ان کے محل وقوع کی جانچ اسٹرم کے نچلے تفاعلوں کی مدد کے بغیر کیا جاسکتی ہے۔ لیکن اگر ایسا تفاعل مل جائے جس کی علامتیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں تو ابتدائی مساوات کی منفی اصلوں کی جانچ بھی اسی طریقہ پر کی جاسکتی ہے۔

۱۷۔ اگر کسی مساوات ف (لا) = کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو ثابت کرو کہ اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے ہر ایک تفاعل کی سب اصلیں بھی حقیقی ہیں اس کو اسی طرح کے استدلال سے ثابت کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۹۶ میں

استعمال کیا گیا ہے۔ ک وہی باقی سلسلے پر غور کرو اور فرض کرو کہ اس کا درجہ م ہے۔ ک اور وہ م تفاعل جو اسکے بعد آتے ہیں ایک ایسا سلسلہ بناتے ہیں جس میں کوئی دو متصل تفاعل باہم معدوم نہیں ہو سکتے۔ جب لا = ∞ تو ان کی علامتیں



باری باری سے مثبت اور منفی ہیں لیکن جب 'لا' = + ∞ تو یہ سب مثبت ہیں اس لئے 'لا جب' - ∞ سے + ∞ تک جاتا ہے تو علامت کی تبدیلیاں کم ہو جاتی ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ علامت کی کوئی تبدیلی کم نہیں ہو سکتی سوائے اس صورت کے جبکہ 'لا' مساوات کا = کی ایک اصل میں سے گزرے۔ پس اس مساوات کی م حقیقی اصلیں ہیں۔

اب چونکہ 'لا' کی وہ قیمت جو کسی تفاعل کو معدوم کرتی ہو دو متصلہ تفاعلوں کو مختلف علامت بناتی ہے اس لئے آسانی کے ساتھ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ کی کوئی مساوات بلحاظ اس تفاعل کے جو اس کے پیشتر ہے انتہائی مساوات ہے۔

(214)

۱۸۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک تفاعل ف م (لا) کی حقیقی اصلیں معلوم ہوں تو ثابت کرو کہ ابتدائی مساوات کی اصلوں کی تعداد اور محل وقوع ف م (لا) کے نیچے دیگر تفاعلوں کی امداد کے بغیر متعین ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف م (لا) = کی حقیقی اصلیں مقدار کی ترتیب میں ع، ب، ...، طہ ہیں اور بقیہ اصلیں خیالی ہیں۔ لا جب - ∞ سے طہ سے کسی قدر چھوٹی قیمت تک بدلتا ہے تو تفاعل ف م (لا) اپنی علامت نہیں بدلتا اور اس لئے ف م (لا) = کی اصلوں کی جانچ کر نہیں جو ان حدود کے درمیان واقع ہوں ف م (لا) کے بعد آنے والے اسٹرم کے تفاعلوں کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہی بات اس وقت صادق آتی ہے جبکہ 'لا' طہ سے ذرا بڑی قیمت سے لیکر یہ سے ذرا چھوٹی قیمت تک گزرتا ہے۔ اور اسی طرح دوسرے وقفوں کے لئے بھی۔ پس اگر ہم وقفوں (- ∞، طہ)، (طہ، ع)، ...، (ب، ع) کی الگ الگ جانچ کریں تو ابتدائی مساوات کی اصلوں کی تعداد جو ان میں سے ہر ایک میں واقع ہوتی ہے اسٹرم کے نیچے کے تفاعلوں کی مدد کے بغیر متعین کیا جاسکتی ہے۔

۱۹۔ اگر اسٹرم کے امدادی تفاعلوں میں سے کسی ایک میں خیالی



اصلیں ہوں تو ابتدائی مساوات میں کم از کم اتنی ہی تعداد خیالی اصلوں کی ہوگی۔

(مسٹر ایف۔ پیمر)

اس کو مثال ما سبق سے اس طرح اخذ کیا جاسکتا ہے کہ علامت کی تبدیلیوں کی بڑی سے بڑی تعداد کا امتحان کیا جائے جو ف (لا) پر ختم ہونیوالے تفاعلوں کے سلسلہ میں کم ہو جاتی ہیں جبکہ لا۔ سے + سے تک بدلتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جہاں تک اس محدود سلسلہ کا تعلق ہے لا کے ف (لا) = کی ہر اصل میں سے گزرنے پر علامت کی ایک تبدیلی کا اضافہ ہو سکتا ہے۔

۲۰۔ مثال ۸ کا طریقہ دفعہ ۹۸ مثال ۱ میں استعمال کرو۔  
آخری دو اسٹرم کے تفاعلوں کو نظر انداز کرنے سے

$$ف (لا) \equiv لا^۱ + لا^۳ + لا^۵ + لا^۷ + لا^۹ + لا^{۱۱} + لا^{۱۳} + لا^{۱۵}$$

$$ف (لا) \equiv لا^۲ + لا^۴ + لا^۶ + لا^۸ + لا^{۱۰} + لا^{۱۲} + لا^{۱۴} + لا^{۱۶}$$

$$سا = لا^{۲۹} - لا^{۲۸} - لا^{۲۷} + لا^{۲۶} + لا^{۲۵} + لا^{۲۴} + لا^{۲۳} + لا^{۲۲}$$

یہ آسانی سے معلوم ہو جاتا ہے کہ سا = کی اصلیں وقفوں (۳-۲) اور (۱۰-۱) میں واقع ہوتی ہیں۔ مساوات ف (لا) = میں دو اصلیں خیالی ہیں کیونکہ سا میں لا کا سرمنفی ہے۔ حقیقی اصلیں اگر کوئی ہوں منفی ہونی چاہئیں۔ مندرجہ بالا تین تفاعل وقفوں (۵-۳) اور (۲-۱) میں اصلوں کے وجود اور محل وقوع کو متعین کرنے کے لئے کافی ہیں۔ یہ فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ ابتدائی مساوات کی دو حقیقی اصلیں موخر الذکر وقفہ میں واقع ہوتی ہیں۔

بہت سی مثالوں میں اسٹرم کے آخری دو تفاعلوں کو اس طور پر نظر انداز کرنا ممکن ہوگا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ دو درجہ تفاعل کی اصلوں کو ٹھیک طور پر معلوم کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ صرف وہ وقفے دریافت کر لئے جائیں جس میں وہ واقع ہوتی ہیں۔



# کیا رہواں با

## عددی مساواتوں کا حل

(215)

۱۰۔ جبری اور عددی مساواتیں۔ جبری اور عددی مساواتوں کے حل میں ایک اصولی فرق ہے۔ قبل الذکر میں نتیجہ کو خالص حرفی نوعیت کے عام ضابطہ سے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ چونکہ ایک اصل کے لئے عام جملہ ہوتا ہے اس لئے بلا امتیاز تمام اصلوں کو تعبیر کرتا ہے۔ اس جملہ کو ایسا ہونا چاہئے کہ اس میں سروں کے جو تفاعل شامل ہوتے ہیں انکی بجائے اصلوں کے متناظر متشاکل تفاعلوں کو درج کیا جائے تو جذری علامات  $\sqrt{\quad}$ ،  $\sqrt[3]{\quad}$  سے تعبیر ہو نیوالے اعمال قابل عمل ہو جائیں اور جب ان متشاکل تفاعلوں کے جذر الکعب اور جذر المربع نکالے جائیں تو اصلوں کا یہ جملہ ایک اصل میں تحویل ہو جائے، مختلف اصلیں جذر المربعوں  $\pm \sqrt{\quad}$  اور جذر الکعبوں  $\sqrt[3]{\quad}$ ،  $\sqrt[3]{\quad}$  سے  $\sqrt[3]{\quad}$  کے مختلف اجتماعوں سے حاصل ہونگی۔ اس بیان کی سادہ مثال دفعہ ۵۵ میں دو درجی کے لئے ملیگی۔ دفعات ۵۹ اور ۶۶ میں کعبی اور چار درجی کے لئے اسی قسم کی مثالیں درج ہیں۔ یہ بھی یاد رہے کہ وہ ضابطہ جو جبری مساوات کی اصل کو تعبیر کرتا ہے اسوقت بھی درست رہتا ہے جب مساوات کے سرخیالی مقداہیں ہوں۔



عددی مساواتوں کی صورت میں اصلوں کو ایسے طریقوں سے جو ابھی بیان کئے جائینگے فرداً فرداً معلوم کیا جاتا ہے۔ کسی ایک اصل کو تقریبی طور پر معلوم کرنے سے پیشتر عموماً یہ ضروری ہے کہ وہ ایک معلوم وقفہ میں واقع ہونی چاہئے جس میں کوئی دوسری حقیقی اصل شامل نہ ہو۔  
عددی مساواتوں کی حقیقی اصلیں یا متوافقات ہو سکتی ہیں یا متباین پہلی جماعت میں اعداد صحیح کسرات اور مختتم یا متوالی اعشاریہ جو کسرات میں تحویل ہو سکتی ہیں شامل ہیں۔ دوسری جماعت غیر مختتم اعشاریہ پر مشتمل ہے۔ پہلی جماعت کی اصلیں ٹھیک ٹھیک معلوم ہو سکتی ہیں اور دوسری جماعت کی اصلوں کو صحت کے کسی درجہ تک تقریباً معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(216)

اب ہم ایک ایسے مسئلہ سے ابتدا کریں گے جو پہلی جماعت کی اصلوں کی تعین کو ایسی اصلوں کی تعین میں تحویل کر دیتا ہے جو صرف صحیح عدد ہیں۔

۱۰۲۔ مسئلہ۔ جس مساوات میں پہلی رقم کا سر ایک ہو اور دوسری رقموں کے سر صحیح اعداد ہوں اس میں کوئی ایسی متوافق اصل نہیں ہو سکتی جو صحیح عدد نہیں ہے۔

کیونکہ اگر ایسا ممکن ہو تو فرض کرو کہ مساوات

$$a^0 + b^1 + c^2 + \dots + n^1 + 1 = 0$$

کی ایک اصل  $\frac{1}{b}$  ہے جو مختصر ترین شکل میں ایک کسر ہے۔ تب

$$\left(\frac{1}{b}\right)^0 + b^1 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \dots + n^1 + 1 = 0$$



اس کو  $b^{(n)}$  سے ضرب دو تو

$$- \frac{1}{b} = \frac{1}{b^{(n)}} + \frac{1}{b^{(n-1)}} + \dots + \frac{1}{b^{(2)}} + \frac{1}{b^{(1)}} + \frac{1}{b^{(0)}}$$

اب یہ ظاہر ہے کہ  $\frac{1}{b}$  سے تقسیم نہیں ہوتا اور مساوات کی بائیں جانب کی ہر رقم ایک صحیح عدد ہے یعنی مختصر ترین شکل کی ایک کسر ایک صحیح عدد کے مساوی ہے جو ناممکن ہے۔ پس مساوات کی اصل  $\frac{1}{b}$  نہیں ہو سکتی۔ اس لئے اسکی حقیقی اصلیں یا تو صحیح اعداد ہیں یا متباہین مقداہیں۔

ہر وہ مساوات جس کے سر محدود، کسیری یا صحیح عدد ہوں، ایسی شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے جس میں پہلی رقم کا سر ایک اور دوسری ارقام کے سر صحیح عدد ہوں (دیکھو دفعہ ۳۱) پس مجموعی استحالیہ کی مدد سے متوافق اصلوں کی تعیین یا مجموع صحیح عددی اصلوں کی تعیین میں تحویل کیجا سکتی ہے۔ اب ہم نیوٹن کا وہ طریق عمل بیان کریں گے جس سے کسی مساوات کی صحیح عددی اصلیں حاصل ہوتی ہیں جبکہ اس مساوات کے سر سب صحیح عدد ہوں۔ اس طریقہ کو مقسوم علیہم کا طریقہ کہتے ہیں۔

(217)

۱۰۳۔ نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ۔ فرض کرو کہ مساوات

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

کی ایک صحیح اصل  $h$  ہے۔ اس کثیرالارقام کو  $h$  سے تقسیم کرنے کے بعد فرض کرو کہ خارج قسمت

$$b^{(n)} + b^{(n-1)} + \dots + b^{(2)} + b^{(1)} + b^{(0)} = 0$$







(218)

اس طریقہ پر متعین کی ہوئی اصلیں سب کی سب مجوزہ مساوات کی متوافق اصلیں ہیں۔ اگر  $\neq$  اتو بھی اس عمل سے مساوات کی صحیح اصلیں حاصل ہو جاتی ہیں لیکن اس طریقہ سے تمام متوافق اصلوں کو متعین کرنے کے لئے ہمیں مجوزہ مساوات کو پہلے ایسی مساوات میں تحویل کر لینا چاہئے جس میں بڑی سے بڑی قوت والی رقم کا سر ایک ہو۔

۳-۱۔ مقسوم علیہم کے طریقہ کا استعمال۔ مقسوم علیہم کے طریقہ کو سہل ترین طریقہ استعمال کرنے کی غرض سے ہم سلسلہ اعمال کو شکل ذیل میں لکھتے ہیں جو دفعہ ۸ کے متشابہ ہے:-

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

دوسری سطر کا پہلا عدد (۱-ب) کو ۱ کو ۱ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوا۔ اس کو ۱ میں جمع کرنا ہو گا تاکہ تیسری سطر کا پہلا عدد (۱-ب) حاصل ہو جائے۔ اس کو ۱ سے تقسیم کرنا ہو گا تاکہ دوسری سطر کا دوسرا عدد (۱-ب) حاصل ہو۔ اس کو پھر ۱ میں جمع کرنا ہو گا

اور علیٰ ہذا القیاس۔ اگر ۱ ایک اصل ہو تو دوسری سطر میں اس طریقہ سے حاصل ہونی والا آخری عدد ۱ ہو گا۔

جب اس طریقہ سے ہم یہ ثابت کرنے میں کامیاب ہو جائیں کہ عدد صحیح ۱ ایک اصل ہے تو کسی مقسوم علیہ کے ساتھ پھر عمل کیا جاسکتا ہے



لیکن یہ عمل ابتدائی سروں ۱، ۱، ۱، ۱، ۱، ۱ پر نہیں بلکہ دوسری سطر کے

مقداروں پر انکی علامتیں بد لکر کرنا چاہئے کیونکہ یہ مقداریں خارج قسمت کے سر ہیں جب ابتدائی کثیرالارقام کو لا۔ ۵ سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اگر کسی مقسوم علیہ سے اثنائے عمل میں کسی مندرجہ ذیل پر کسری ایشجہ حاصل ہو تو اس کو فوراً خارج کر دینا چاہئے اور عمل کو روک دینا چاہئے۔

مقسوم علیہ ۱ اور ۱ جو صریحاً ۱ کے ہمیشہ صحیح مقسوم علیہ ہیں ان کو آزمائشی مقسوم علیہم کی تعداد میں شامل کرنے کی ضرورت نہیں کیونکہ مقسوم علیہم کے طریقہ کو استعمال کئے بغیر بہت آسانی کے ساتھ معمولی اندراج سے یہ بتایا جاسکتا ہے کہ آیا ان میں سے کوئی عدد مساوات کی اصل ہے یا نہیں۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا - ۲ لا - ۳ لا + ۱۳ لا + ۳۸ لا - ۲۴ = ۰$$

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

رقمتوں کو گروہوں میں تقسیم کرنے سے (دفعہ ۸) بغیر کسی مشکل کے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اس کی سب اصلیں ۵ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ ذیل کے مقسوم علیہم ممکنہ اصلیں ہیں:-

$$۴ - ۳ - ۲ - ۲ - ۳ - ۴$$

ہم ۴ سے شروع کرتے ہیں:-

$$۱ - ۲ - ۱۳ - ۳۸ - ۲۴$$

$$\frac{۸}{۵} - \frac{۶}{۳۲}$$

عمل یہاں رک جاتا ہے کیونکہ ۵، ۴ سے پورا تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۴ اصل



نہیں ہے۔

اب ہم عدد ۳ کے ساتھ عمل کرتے ہیں:-

$$- 22 \quad - 38 \quad - 13 \quad - 2 \quad - 1$$

$$\frac{-8}{3} \quad \frac{-10}{3} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{-1}{3}$$

پس ۳ ایک اصل ہے۔ ۲ کے ساتھ عمل کرنے میں جیسا کہ اوپر بتایا گیا ہم دوسری سطر کے سروں سے انکی علامتیں بدل کر فائدہ اٹھاتے ہیں:-

$$8 \quad - 10 \quad - 1 \quad - 1$$

$$\frac{2}{6} \quad \frac{-3}{2} \quad \frac{-1}{0}$$

پس ۲ بھی ایک اصل ہے۔ پھر ۲ کے ساتھ عمل کرنے سے

$$- 2 \quad - 3 \quad - 1$$

$$\frac{2}{5}$$

عمل ۵ پر رک جاتا ہے کیونکہ یہ ۲ سے تقسیم نہیں ہوتا۔ پس ۲ اصل نہیں ہے۔  
۳ بھی اصل نہیں ہے کیونکہ یہ ۲ کو تقسیم نہیں کرتا۔

[ہم ۳ کو پہلے ہی خارج کر سکتے تھے کیونکہ وہ تقسیم شدہ کثیر لارقام کی مطلق رقم ۸ کو تقسیم نہیں کرتا۔ اس بات کو پیش نظر رکھنے سے مقسوم علیہم کی تعداد گھٹانے میں اکثر فائدہ ہوتا ہے]

اب ہم آخری مقسوم علیہ ۴ کو لیتے ہیں:-

$$- 4 \quad - 3 \quad - 1$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{-1}{0}$$

پس ۴ بھی اصل ہے۔

اس لئے مساوات کی صحیح اصلیں ہیں ۳، ۲، ۴ اور عمل کی آخری



منزل سے یہ ظاہر ہے کہ جب ابتدائی کثیرالارقام کو ثنائی جملوں لا - ۳، لا - ۲ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو نتیجہ لا - ۱ حاصل ہوتا ہے اور اس لئے ایک بھی ایک اصل ہے۔ پس ابتدائی کثیرالارقام کو شکل  
(لا - ۱) (لا - ۲) (لا - ۳) (لا + ۴)

میں رکھا جاسکتا ہے۔

$$۲ - مساوات ۳ لا^۲ - ۲۳ لا + ۳۵ لا^۲ + ۳۱ لا - ۳۰ = ۰$$

کی صحیح اصلیں معلوم کرو۔

اسکی اصلیں ۲ اور ۸ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ پس صرف  
مقسوم علیہم ۲، ۳، ۵، ۶ کو آزمانا ہوگا۔  
ہم فوراً معلوم کر لیتے ہیں کہ ۶ اصل نہیں ہے۔  
۵ کے لئے ہم حاصل کرتے ہیں

$$۳۰ - ۳۱ ۳۵ - ۲۳ ۳$$

$$\frac{۳ -}{۰} \quad \frac{۸ -}{۱۵} \quad \frac{۵ -}{۲۰} \quad \frac{۶ -}{۲۵}$$

پس ایک اصل ۵ ہے۔ ۳ کے لئے ہم معلوم کرتے ہیں

$$۶ - ۵ - ۸ - ۳$$

$$\frac{۳ -}{۰} \quad \frac{۱ -}{۹} \quad \frac{۲ -}{۳}$$

اس لئے ۳ بھی ایک اصل ہے۔ ہم آسانی کے ساتھ یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ  
۲ اصل نہیں ہے۔

ابتدائی کثیرالارقام کو (لا - ۵) (لا - ۳) سے تقسیم کیا جائے تو خارج  
قسمت آخری عمل کی رو سے ہے

$$۳ لا^۲ + لا - ۲$$

جسکی ایک اصل - ۱ ہے۔ پس مجوزہ مساوات کی تمام صحیح اصلیں  
- ۱، ۳، ۵، ہیں۔



اس مساوات کی چوتھی اصل  $\frac{1}{2}$  ہے جو متوافق اصل ہے اور صحیح عدد نہ ہونے کی وجہ سے اوپر کے عمل میں بیان نہیں کی گئی۔

۳۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ = ۲۴$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اصلوں کے حدود ہیں۔ ۳، ۴

جواب :- اصلیں ہیں۔ ۳، ۲، ۱، ۰

۴۔ مساوات

$$لا^۳ - لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ = ۶۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں ۶ اور ۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ ہم یہ معلوم کر لیتے ہیں کہ ۲، ۳، ۵ اصلیں ہیں اور آخری تقسیم کے بعد جو جزو ضریبی باقی رہ جاتا ہے وہ لا - ۲ ہے۔ پس ۲ دہری اصل ہے۔ چنانچہ کثیرالارقام

$$(لا - ۲)^۲ (لا - ۳) (لا + ۵)$$

کے معادل ہے۔

دفعہ ۱۰۶ میں ضعفی اصلوں کی صورت پر مزید بحث کی جائیگی۔

۱۰۵۔ مقسوم علیہم کی تعداد کو محدود کرنیکا طریقہ۔ راست

اندراج کے ذریعہ اس بات کا تعین کرنا فی الواقع ممکن ہے کہ آیا  $لا^n$  کے کوئی مقسوم علیہم مجوزہ مساوات کی اصلیں ہیں یا نہیں لیکن نیوٹن کے طریقہ کا ایک فائدہ یہ ہے کہ بعض مقسوم علیہم بہت تھوڑی محنت کے بعد خارج کئے جاسکتے ہیں جیسا کہ اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے۔ اس طریقہ کا ایک دوسرا فائدہ بھی ہے جس کو ہم اب بیان کرینگے۔ جب  $لا^n$  کے مقسوم علیہم کی تعداد اصلوں کے حدود کے اندر بڑی ہو تو اس طریقہ



تفصیل کے ساتھ استعمال کرنے سے پیشتر ان مقسوم علیہم کی تعداد کو گھٹانا ضروری ہے جنکو آزمانے کی ضرورت ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ سے عمل میں لایا جاسکتا ہے:-

اگر ف (لا) = کی ایک صحیح اصل ہے تو جیسا کہ اوپر بتایا گیا ف (لا) لا۔ ہ سے پورا تقسیم ہو جاتا ہے اور خارج قسمت کے سر صحیح اعداد ملتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم لا کو کوئی صحیح عددی قیمت دیں اور ف (لا) کی متناظر قیمت کو لا۔ ہ کی متناظر قیمت سے تقسیم کریں تو خارج قسمت ایک صحیح عدد ہونا چاہئے۔ سہولت کی خاطر ہم سادہ ترین صحیح اعداد ۱ اور ۱ لیتے ہیں اور کسی مقسوم علیہ ہ کو آزمانے سے پیشتر ہم اس پر یہ شرط عائد کر دیتے ہیں کہ ف (لا) لا۔ ہ سے تقسیم ہو جائے (یا علامت کو بدل دینے سے) لا۔ ہ اور ف (لا) لا۔ ہ سے تقسیم پذیر ہو جائے (یا علامت کو بدل دینے سے) لا۔ ہ سے۔

اس نتیجہ کو استعمال کرتے وقت سب سے پہلے ف (لا) اور ف (لا) کو محسوب کرنے میں سہولت ہوگی۔ اگر ان میں سے کوئی ایک معدوم ہو جائے تو متناظر صحیح عدد ایک اصل ہے اور پھر ہم اس تھوڑے کثیر الارقام پر عمل جاری کریں گے جس کے سر اس نتیجہ کو معلوم کرنے کے عمل میں حاصل ہوتے ہیں جو زیر بحث صحیح عدد کو درج کرنے سے ملتا ہے۔

## مثالیں

$$۱ - لا - ۲۳ لا + ۱۶۰ لا - ۲۸۱ لا - ۲۵ لا - ۴۴۰ = ۰$$

اصلیں - ۱ اور ۲۴ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

حسب ذیل مقسوم علیہم حاصل ہوتے ہیں:-

$$۲، ۴، ۵، ۸، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۲۲$$

ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے ہیں



ف (۱) = ۸۴۰ - ۶۴۸ = (۱ - ۱) ف

اس لئے ہم وہ تمام مقسوم علیہم خارج کر دیتے ہیں جو 'بقدر ایک کے گھٹ جائیں گے بعد' ۸۴۰ کو تقسیم نہیں کرتے، اور جو 'بقدر ایک کے بڑھ جائیں گے بعد' ۶۴۸ کو تقسیم نہیں کرتے۔ پہلی شرط ۱۰ اور ۲۰ کو خارج کرتی ہے اور دوسری شرط ۴ اور ۲۲ کو۔ باقی اعداد ۲، ۵، ۸، ۱۱ پر مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ۵، ۸، ۱۱ اصلیں ہیں اور حاصل خارج قسمت لا + لا + ۱ ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام جملہ (۵ - لا) (۸ - لا) (۱۱ - لا) (لا + لا + ۱) کے معادل ہے۔

۲ - لا - ۲۹ لا - ۳ لا + ۳ لا - ۳ لا + ۶۰ = -  
اصلیں ۳ اور ۳۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔  
مقسوم علیہم ہیں:-

۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۰، ۱۲، ۱۵، ۲۰، ۳۰

ف (۱) = ۱، اس لئے ایک اصل ہے۔

ف (۱) = ۱۲۴ - اوپر کی شرط ۲، ۳، ۳۰ کے سوا سب کو خارج کر دیتی ہے۔  
آسانی کے ساتھ یہ معلوم ہو جائیگا کہ ۲ اور ۳ اصلیں ہیں اور آخری خارج قسمت لا + ۱ ہے۔ پس دیا ہوا کثیر الارقام (لا - ۱) (لا - ۳۰) (لا + ۲) کے معادل ہے۔

## ۶-۱۔ ضعیفی اصولوں کی تعین - مقسوم علیہم کا طریقہ ضعیفی اصولوں کی

تعین کرتا ہے جبکہ وہ متوافق ہوں۔ اس طریقہ کو استعمال کرنے میں جب ۱۰ کا کوئی مقسوم علیہ جس کا اصل ہونا معلوم ہو چکا ہے تو اس کا امتحان کر لینا چاہئے کہ وہ کی رقم مطلق کا مقسوم علیہ ہو تو ہمیں اس بات کا امتحان کر لینا چاہئے کہ وہ موخر الذکر کی اصل بھی ہے یا نہیں۔ اگر وہ قبول شدہ کثیر الارقام کی اصل ہے تو ایسی صورت میں وہ مجوزہ مساوات کی دہری اصل ہے۔ اگر وہ دوسرے قبول شدہ



کثیرالارقام کی اصل بھی ہو تو وہ مجوزہ مساوات کی تہری اصل ہے اور علیٰ تہ القیاس  
جب کبھی کسی مساوات میں مرتبہ تکرار یا نیوالی صرف ایک ضعیفی اصل  
ہو تو اس کو اس طریقہ پر معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں  
ف (لا) اور ف (لا) کا مقسوم علیہ اعظم (لا - ع) کی شکل کا ہوگا  
اور اگر ع متباین ہو تو اس کے سر متوافق نہیں ہو سکتے۔  
(223) تیسرے چوتھے اور پانچویں درجوں کی مساواتوں کی ضعیفی اصل  
مقسوم علیہ اعظم معلوم کرنے کے عمل کی مدد کی بغیر پوری طرح معلوم  
کیا جاسکتی ہیں جیسا کہ ذیل کے مشاہدات سے واضح ہو جائیگا۔  
(۱) کبھی۔ اس صورت میں ضعیفی اصلوں کو متوافق ہونا چاہئے  
کیونکہ اس کا درجہ اتنا بڑا نہیں ہے کہ دو جدا جدا اصلیں تکرار یا سکیں۔  
(۲) چار درجی۔ اس صورت میں یا تو ضعیفی اصلیں متوافق ہیں  
یا یہ تفاعل ایک کامل مربع ہے۔ کیونکہ چار درجی کی وہ شکل جس میں  
دو جدا جدا اصلیں تکرار یا سکتی ہیں صرف یہ ہے۔

(لا - ع) (لا - ب)

یعنی ایک دو درجی کا مربع۔ چار درجی کی اصلیں متباین ہو سکتی ہیں۔  
اس لئے اگر یہ معلوم ہو جائے کہ چار درجی کی اصلیں متوافق نہیں ہیں تو ہمیں  
یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا وہ کامل مربع ہے تاکہ مساوی متباین اصلوں کا  
تعمین ہو سکے۔

(۳) پانچ درجی۔ اس صورت میں یا تو ضعیفی اصلیں متوافق ہیں  
یا یہ تفاعل دو جملوں کا حاصل ضرب ہے، ایک خطی متوافق جزو  
ضربی اور دوسرا ایک دو درجی کا مربع۔ کیونکہ دو مختلف اصلوں کے تکرار  
پاسکنے کے لئے تفاعل کو شکلوں

(لا - ع) (لا - ب) (لا - ج) (لا - ع) (لا - ب)

میں سے کوئی نہ کوئی شکل اختیار کرنی چاہئے۔ موخر الذکر شکل میں اصلیں  
متباین نہیں ہو سکتیں۔ لیکن قبل الذکر ایسی صورت کا جواب ہو سکتی ہے



جس میں ایک متوافق جزو ضربی ایک دو درجی کے مربع سے مضروب ہو جسکی اصلیں متباین ہیں۔ اس طرح اگر پانچ درجی میں متوافق اصلوں کا غیر موجود ہونا معلوم ہو جائے تو اسکی اصلیں ضعیفی نہیں ہو سکتیں۔ اگر اس میں صرف ایک متوافق اصل پائی جائے تو اس بات کا امتحان کر لینا چاہئے کہ آیا باقی ماندہ جزو ضربی کامل مربع ہے۔ اگر اس میں ایک سے زیادہ متوافق اصلیں ہوں تو ضعیفی اصلیں متوافق اصلوں میں ملینگی۔

(224)

## مثالیں

$$1 - 2^3 - 3^3 - 4^3 - 11^2 - 12^2 + 6^2 = 0$$

کی تمام متوافق اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود - ۱، ۱۶ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ مقسوم علیہم ۲، ۴، ۸ ہیں۔

$$\begin{array}{r} 2 \quad 31 - \quad 112 \quad 6^2 \\ \hline 2 - \quad 15 \quad 8 \\ \hline \quad 16 - \quad 120 \end{array}$$

اسلئے ۸ ایک اصل ہے۔ اب تحویل شدہ مساوات پر عمل کرو

$$\begin{array}{r} 2 \quad 15 - \quad 8 - \\ \hline 2 - \quad 1 - \\ \hline \quad 16 - \end{array}$$

۸ پھر ایک اصل ہے اور باقی ماندہ جزو ۲ لا + ۱ ہے۔

جواب :- ف (لا) = (۲ لا + ۱) (۸ - لا)

$$1 - 2^3 - 3^3 - 4^3 - 11^2 - 12^2 + 6^2 = 0$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلیں حدود - ۶، ۱۲ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ (دفعہ ۸ مثال ۱۰ کا طریقہ استعمال کرو)



جواب :- ف (لا) = (لا + ۲) (لا - ۲)

$$۹ لا^۳ - ۱۲ لا^۲ - ۱ لا - ۲۰ لا + ۱۶ = ۰$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں دریافت کرو۔

اصلیں حدود - ۲، ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔  
مساوات جس شکل میں ہے اس میں صحیح اصلیں نہیں ہیں۔ لیکن پھر بھی  
اسکی اصل متوافق ہو سکتی ہے۔ اس کو جانچنے کے لئے اصلوں کو ۳ سے  
ضرب دو تاکہ لا کا سر ایک ہو جائے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$۳ لا^۳ - ۱۲ لا^۲ - ۱ لا - ۲۰ لا + ۱۶ = ۰$$

اب اصلیں حدود - ۲، ۱۵ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔

اسکی ایک دوہری اصل - ۲ ہے اور تفاعل (لا - ۱۲) (لا + ۹) (لا + ۴)

کے معادل ہے۔ اس لئے ابتدائی مساوات

$$(لا - ۲) (لا + ۱) (لا + ۳) (لا + ۴) = ۰$$

کے مماثل ہے۔

$$۴ لا^۴ + ۱۲ لا^۳ + ۳۲ لا^۲ - ۲۴ لا + ۴ = ۰$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

(225) اصلیں - ۱۲ اور ۱ کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ اسلئے قابل امتحان

مقسوم علیہم صرف - ۴، - ۲، - ۱ ہیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ مساوات کی  
کوئی اصل متوافق نہیں ہے۔ اب ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آیا دیا ہوا تفاعل کامل مربع ہے  
تفاعل کا جذر المربع نکالنے سے یا مثال ۳ صفحہ ۱۸ کی شرطوں کو استعمال کرنے سے  
یہ معلوم ہو سکتا ہے۔ چنانچہ یہ لا + ۶ لا - ۲ کا مربع ہے (مثال صفحہ ۲۴)۔  
پس دی ہوئی مساوات مساوی اصلوں کے دو زوج رکھتی ہے اور دونوں قیام  
ہیں۔

$$۵ - ف (لا) = لا - لا^۲ - ۱۲ لا^۳ + لا^۴ + ۲۸ لا + ۱۲ = ۰$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

اصلوں کے حدود - ۴، ۴ ہیں۔



مساوات کی ایک اصل - ۳ ہے اور تحویل شدہ مساوات ہے

$$لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ + لا^۲ = ۲$$

اور کوئی دوسری متوافق اصل موجود نہیں ہے۔ اس لئے ضعیفی اصلوں کا امکان صرف اس صورت میں ہے جبکہ یہ بعد کا تفاعل کامل مربع ہو۔ چنانچہ یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ وہ کامل مربع ہے اور

$$ف (لا) = (لا^۲ - لا^۲ - لا^۲) (۲ - لا) (۳ + لا)$$

$$۶ - ف (لا) = لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ = ۱۸ -$$

کی متوافق اور ضعیفی اصلیں معلوم کرو۔

$$جواب :- ف (لا) = (لا^۲ + لا) (۱ - لا) (۲ - لا) (۳ - لا)$$

۷ - ذیل کی مساوات میں صرف دو مختلف اصلیں ہیں۔ انکو معلوم کرو۔

$$لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ = ۱۰۸ -$$

عموماً یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک صحیح اصل ۷ دو مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں ۷ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے اور آخر سے دوسرے سر میں ۷۔ اگر اصل تین مرتبہ واقع ہوتی ہو تو آخری سر میں ۷، ۳، آخر سے دوسرے سر میں ۷، ۲، اور آخر سے تیسرے سر میں ۷ جزو ضربی کے طور پر شامل ہونا چاہئے۔ یہاں آخری سر = ۲ × ۳ - پس اگر نہ تو ۱ اور نہ ۱ اصل ہو تو اصلیں ۲ اور ۳ ہونی چاہئیں۔ اسکی تصدیق آسانی کے ساتھ ہو سکتی ہے کہ یہ دونوں فی الحقیقت اصلیں ہیں۔

۸ - مساوات

$$لا^۲ - لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = ۳$$

میں مساوی اصلیں ہیں ان کو معلوم کرو۔

اس مثال میں مقسوم علیہم کا طریقہ استعمال کرنے سے بیشتر اصلوں کو ان کے متکافوں میں تبدیل کرنے سے آسانی پیدا ہوگی۔

$$جواب :- ف (لا) = (لا^۲ - لا^۲) (۱ - لا) (۳ - لا) (۱ + لا)$$



۱۰۷۔ نیوٹن کا تقریب کا طریقہ - یہ بتا دینے کے بعد کہ مساواتوں کی

متوافق اصلیں کس طرح معلوم کی جا سکتی ہیں اب ہم متباین اصلوں کی تقریبی قیمتیں حاصل کرنے کے بعض طریقے بیان کرتے ہیں۔ تقریب کا وہ طریقہ جو عام طور پر نیوٹن سے منسوب کیا جاتا ہے اور جو اس دفعہ کا موضوع ہے اس لحاظ سے قابل قدر ہے کہ اس کو باورانی تفاعلوں پر مشتمل عددی مساواتوں میں اور ان مساواتوں میں جنہیں صرف جبری تفاعل شامل ہوتے ہیں یکساں طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اگرچہ موزر الذکر جماعت کے تفاعلوں کی صورت میں عملی مقاصد کے مد نظر ہارنر کے طریقہ کو نیوٹن کے طریقہ پر ترجیح حاصل ہے تاہم اصول میں دونوں طریقے بڑی حد تک مماثل ہیں۔ ہارنر کا طریقہ جس کا حوالہ اوپر دیا گیا ہے دفعتاً آئندہ میں واضح کیا جائیگا۔

تقریب کے تمام طریقوں میں جس اصل کو ہم تلاش کرتے ہیں اسکی متعلق یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ وہ دوسری اصلوں سے جدا کر لی گئی ہے اور تنگ حدود کے درمیان معلومہ وقفہ کے اندر واقع ہے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات  $f(x) = 0$  ہے اور قیمت ۱ معلوم ہے جو مساوات کی ایک اصل سے بقدر ایک چھوٹی مقدار  $h$  کے فرق رکھتی ہے۔ اب چونکہ مساوات کی اصل  $1 + h$  ہے اسلئے  $f(1 + h) = 0$  یعنی

$$f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \dots = 0$$

اب چونکہ  $h$  چھوٹا ہے اسلئے  $h$  کی ایک سے بڑی تمام قوتوں کو نظر انداز کر دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں

۱۰ دیکھو نوٹ (ب) کتاب کے آخری حصہ میں۔



$$ف(۱) + ف(۱) = ۵$$

جس سے

$$۵ = \frac{ف(۱)}{ف(۱)}$$

یعنی مطلوبہ اصل کی پہلی تقریبی قیمت ہے

$$۱ - \frac{ف(۱)}{ف(۱)}$$

اس قیمت کو ب سے تعبیر کرو اور پھر وہی عمل جاری کرو تو قریب تقریبی قیمت

$$ب - \frac{ف(ب)}{ف(ب)}$$

حاصل ہوگی۔ اس عمل کو دہرانے سے صحت کے کسی درجہ تک تقریبی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے۔

## مثال

$$۳ - ۲ - ۱ = ۵$$

مساوات کی مثبت اصل کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

اصل ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے (مثال ۱ دفعہ ۹۶)۔ حدود کو تنگ کرنے سے اصل کا ۲ اور ۲ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا ہے۔ ہم ۲ کو وہ مقدار لیتے ہیں جو ۱ سے تعبیر کی جاتی ہے۔ یہ مقدار اصلی قیمت ۱ + ۵ سے ۱۔ سے زیادہ فرق نہیں رکھ سکتی۔ آسانی کے ساتھ ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{ف(۱)}{ف(۱)} = \frac{ف(۲۱)}{ف(۲۱)} = \frac{۶۰۶۱}{۱۱۶۲۳} = ۰.۵۲۳$$



(227)

اسلے پہلا تقرب ہے

$$۲۵۱ - ۵۴۳ = -۵۰۰ - ۹۴۶ = ۲۵۰$$

اسکو ب قرار دینے سے اور کسر  $\frac{ف (ب)}{ف (ب)}$  کو محسوب کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$ب - \frac{ف (ب)}{ف (ب)} = ۲۵۰ - ۹۴۵۵۱۴۸$$

جو دوسرا تقرب ہے۔ وٹس علیٰ ہذا۔

نیوٹن کے طریقہ میں عام طور پر تقرب کی رفتار بہت تیز ہوتی ہے لیکن جس اصل کو ہم تلاش کر رہے ہیں اس کے ساتھ ہی جب دوسری اصل تقریباً اس کے مساوی ہوتی ہے تو کسر  $\frac{ف (۱)}{ف (۱)}$  کا چھوٹا ہونا ضروری نہیں کیونکہ تقریباً مساوی اصلوں میں سے کسی ایک کی قیمت،  $ف (۱)$  کو ایک چھوٹی مقدار میں تحویل کر دیتی ہے۔ اسی صورت میں خاص خاص پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے اس طریقہ کی تفصیلی بحث میں ہم پڑنا نہیں چاہتے اس وجہ سے کہ عملی مقاصد کے لئے ہارنر کا طریقہ کہیں زیادہ مفید و کارآمد ہے جو اب بیان کیا جائیگا۔

## ۱۰۸۔ عدوی مساواتوں کو حل کرنے کے لئے ہارنر کا طریقہ۔

اس طریقہ سے متوافق اور متباین دونوں اصلیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ اس میں اصل کو ہندسہ بہ ہندسہ دریافت کیا جاتا ہے، پہلے اصل کا صحیح حصہ (اگر کوئی ہو) اور پھر اعشاری حصہ حاصل کرتے ہیں یہاں تک کہ اصل اگر متوافق ہو تو پوری طرح اور اگر متباین ہو تو اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک معلوم ہو جائے۔ یہ عمل جذر المربع اور جذر الکعب نکالنے کے عمل کے متشابه ہے جو فی الحقیقت موجودہ طریقہ سے دو درجی اور کبھی مساواتوں کے عام حل معلوم کرنے کی خاص صورتیں ہیں۔

ہارنر کے طریقہ کا خاص اصول یہ ہے کہ دی ہوئی مساوات کی



اصولوں کو دفعہ ۳۳ میں بیان کردہ طریقہ کی بموجب بقدر معلومہ مقداروں کے متواتر گھمایا جاتا ہے۔ اس طریقہ کا بڑا فائدہ یہ ہے کہ متواتر استحالات مختصر حسابی شکل میں پیش نظر ہو جاتے ہیں اور اصل ایک مسلسل عمل سے اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات تک صحیح صحیح حاصل ہو جاتی ہے۔

اصولوں کو گھٹانے کا اصول اس دفعہ میں سادہ مثالوں کے ذریعہ واضح کیا جائیگا اور دفعات آئندہ میں چند اور اصول بیان کئے جائیں گے جنکی مدد سے اس طریقہ کے عملی استعمال میں بہت کچھ سہولت پیدا ہو سکتی ہے۔

(228)

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$۲ لا - ۸۵ لا - ۸۵ لا - ۸۶ = ۰$$

کی مثبت اصلیں معلوم کرو۔

جب کوئی عددی مساوات حل کرنے کے لئے تجویز ہو تو پہلا کام یہ ہوگا کہ اصل کا پہلا عدد معلوم کیا جائے۔ چند آزمائشوں سے یہ عدد معلوم ہو سکتا ہے اگرچہ بعض صورتوں میں اصولوں کو جدا کرنے کے وہ طریقے استعمال کرنے ہونگے جو دسویں باب میں بیان کئے گئے ہیں۔ مثال یا لایں صرف ایک اصل مثبت ہو سکتی ہے اور یہ ۴۰ اور ۵۰ کے درمیان واقع ہے۔ پس اصل کا پہلا عدد ۴۰ ہے۔ اب ہم اصولوں کو بقدر ۴۰ کے گھٹاتے ہیں۔ استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱۰ کے درمیان ہوگی۔ امتحان کرنے سے اس کا ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتا معلوم ہوتا ہے۔ اب ہم استحالہ شدہ مساوات کی اصولوں کو بقدر ۳ کے گھٹاتے ہیں جس کا اثر یہ ہوگا کہ مجوزہ مساوات کی اصلیں بقدر ۴۳ کے گھٹ جائیں گی۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل صفر اور ۱ کے درمیان ہوگی۔ اس آخری مساوات کی اصولوں کو بقدر ۵ کے گھٹانے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسکی مطلق رقم صفر ہو جاتی ہے یعنی مجوزہ مساوات کی



اصول کو بقدر ۴۳۵ کے گھٹانے سے اسکی مطلق رقم صفر میں تحویل ہوتی ہے جس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ دی ہوئی مساوات کی ایک اصل ۴۳۵ ہے۔ حسابی اعمال کا سلسلہ ذیل میں ظاہر کیا جاتا ہے :-

|      |         |       |      |   |
|------|---------|-------|------|---|
| ۴۳۵) | ۸۷ -    | ۸۵ -  | ۸۵ - | ۲ |
|      | ۱۱۴۰ -  | ۲۰ -  | ۸۰   |   |
|      | ۱۱۴۸۷ - | ۲۸۵ - | ۵ -  |   |
|      | ۹۵۹۲    | ۳۰ -  | ۸۰   |   |
|      | ۱۸۹۳ -  | ۲۷۱۵  | ۷۵   |   |
|      | ۱۸۹۳    | ۲۸۳   | ۸۰   |   |
|      | ۰       | ۳۱۹۸  | ۱۵۵  |   |
|      |         | ۵۰۱   | ۲    |   |
|      |         | ۳۶۹۹  | ۱۶۱  |   |
|      |         | ۸۷    | ۶    |   |
|      |         | ۳۷۸۶  | ۱۶۷  |   |
|      |         |       | ۶    |   |
|      |         |       | ۱۷۳  |   |
|      |         |       | ۱    |   |
|      |         |       | ۱۷۴  |   |

شکستہ خط ہر استحالہ کے اختتام کی علامت ہے اور جبلی ہندسوں میں لکھے ہوئے اعداد متواتر استحالہ شدہ مساواتوں کے سر ہیں (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ مثلاً

$$۲ \text{ لا} + ۱۵۵ \text{ لا} + ۲۷۱۵ \text{ لا} - ۱۱۴۸۷ = ۰$$

وہ مساوات ہے جبکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصولوں سے بقدر ۴۰ کے چھوٹی ہیں اور جس کی مثبت اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اگر دوسری استحالہ شدہ مساوات کی بالکل ٹھیک اصل ۵ نہ ہوتی بلکہ (فرض کرو) ۵ اور ۶ کے درمیان واقع ہوتی تو مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے تین ہند



۴۳، ۵ ہوتے اور چوتھا ہندسہ معلوم کرنے کے لئے اصلوں کو بقدر ۵ کے گھٹانا پڑتا اور علی ہذا القیاس۔

۲۔ مساوات

$$۴ \text{ لا} - ۱۳ \text{ لا} - ۳۱ \text{ لا} - ۲۴۵ =$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

ہم پہلے حسابی عمل لکھ لیتے ہیں اور پھر اسکے متعلق کچھ بحث کریں گے۔

|      |        |       |        |
|------|--------|-------|--------|
| ۴    | ۱۳     | ۳۱    | ۲۴۵    |
| -    | -      | -     | -      |
| ۲۴   | ۶۶     | ۲۱۰   | ۶۵     |
| ۱۱   | ۳۵     | ۲۱۰   | ۵۱۶۳۹۲ |
| ۲۴   | ۲۱۰    | ۲۴۵   | ۱۳۶۶۰۸ |
| ۳۵   | ۱۱۶۹۶  | ۱۱۶۹۶ | ۱۳۶۶۰۸ |
| ۲۴   | ۲۵۶۶۹۶ | ۱۲۶۱۲ |        |
| ۵۹   | ۲۴۹۶۰۸ | ۳۶۰۸  |        |
| ۶۸   | ۲۴۶۶۱۶ |       |        |
| ۵۹۶۸ |        |       |        |
| ۶۸   |        |       |        |
| ۶۰۶۶ |        |       |        |
| ۶۸   |        |       |        |
| ۶۱۶۴ |        |       |        |
| ۶۲   |        |       |        |
| ۶۱۶۶ |        |       |        |

آزمائش سے ہمیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ مجوزہ مساوات کی مثبت اصل

۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اس لئے اصل کا پہلا ہندسہ ۶ ہے۔ اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹاؤ۔ استعمل شدہ مساوات

$$۴ \text{ لا} + ۵۹ \text{ لا} + ۲۴۵ \text{ لا} - ۶۵ =$$



کی اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ امتحان کرنے سے اسکا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلئے مجوزہ مساوات کی اصل کے پہلے دو ہندسے ۶۵ ہیں۔ پھر اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹاؤ تو استحالہ شدہ مساوات کی اصل ۵۰ ہوگی۔ پس مجوزہ مساوات کی مطلوبہ اصل ۶۵۲۵ ہے۔

عمل میں سہولت و آسانی پیدا ہوگی اگر علامت اعشاریہ سے اجتناب کیا جائے چنانچہ اس بحث کی ترکیب یہ ہے:- جب اصل کا اعشاریہ حصہ (فرض کرو.... ج ب د) نمودار ہو نیکی ہو تو متناظر استحالہ شدہ مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دیدو یعنی پہلی انتصابی قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب ایک صفر لگاؤ دوسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب دو صفر تیسری قطار میں جو عدد ہے اسکی دائیں جانب تین صفر اور علیٰ ہذا القیاس اگر قطاریں تعداد میں زیادہ ہوں (اور یہ بات فی الواقعی ہوگی جب دی ہوئی مساوات تیسرے درجہ سے بڑے درجہ کی ہو) اب استحالہ شدہ مساوات کی اصل.... ج ب د نہیں بلکہ.... ج ب د ہوگی۔ اصلوں کو بقدر ۱ کے گھٹاؤ تو استحالہ شدہ مساوات کی اصل.... ج ب د ہوگی۔ پھر اس مساوات کی اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دو تو اصل ہو جائیگی.... ج ب د اور پھر وہی عمل جاری کرو۔ اس اصول کو واضح کرنیکی خاطر ہم اوپر کے حسابی عمل کو علامات اعشاریہ حذف کر کے دہراتے ہیں:-

280)

|             |                |                   |
|-------------|----------------|-------------------|
| ۲ - ۱۳      | ۳۱ -           | ۲۵۰ - ۶۵          |
| ۲۲          | ۶۶             | ۲۱۰               |
| <u>۱۱</u>   | <u>۳۵</u>      | <u>۶۵۰۰۰ -</u>    |
| ۲۲          | ۲۱۰            | ۵۱۳۹۲             |
| <u>۳۵</u>   | <u>۲۳۵۰ -</u>  | <u>۱۳۶۰۸۰۰۰ -</u> |
| ۲۲          | ۱۱۹۶           | ۱۳۶۰۸۰۰۰          |
| ۵۹۰         | <u>۲۵۶۹۶</u>   | <u>۰</u>          |
| ۸           | ۱۲۱۲           |                   |
| <u>۵۹۸</u>  | ۲۶۹۰۸۰۰        |                   |
| ۸           | ۳۰۸۰۰          |                   |
| <u>۶۰۶</u>  | <u>۲۷۲۱۶۰۰</u> |                   |
| ۸           |                |                   |
| <u>۶۱۴۰</u> |                |                   |
| ۲۰          |                |                   |
| <u>۶۱۶۰</u> |                |                   |



آئندہ تمام مثالوں میں یہ اختصار اختیار کیا جائیگا۔

۳۔ مساوات

$$۲۰ - لا^۲ - ۱۲۱ لا^۲ - ۱۲۱ لا - ۱۴۱ =$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

اصل کا ۷ اور ۸ کے درمیان واقع ہونا آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔ اسلئے اس کی شکل ہے .... ب ۱ ۷۔ اصلوں کو بقدر ۷ کے گھٹانے اور ۱۰ سے ضرب دینے سے حاصل ہونیوالی مساوات ہے

$$۲۰ لا^۲ + ۲۹۹۰ لا^۲ + ۱۱۲۵ لا - ۵۷۰ =$$

اسکی مثبت اصل ..... ب ۱ ۷ ہے اور چونکہ یہ اصل صریحاً صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اسلئے ۱ =۔ اور اسلئے اصل کے اعشاری حصہ میں ہم پہلے ہندسہ صفر لکھتے ہیں اور پھر دوسرے استحالہ کو عمل میں لانے سے پیشتر اصلوں کو ۱۰ سے ضرب دیتے ہیں۔ اس طور پر استحالہ شدہ مساوات کی اصل کا ۵ کے مساوی ہونا آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

جواب :- ۵ - ۷

اوپر کی مثالوں میں اصل بہت جلد ختم ہو گئی ہے یعنی صرف تین ہندسوں کے بعد۔ لیکن جب عمل حساب طول طویل ہو اور متواتر آئیو الے ہندسوں کو اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا ضروری ہو تو یہ کام بہت محنت طلب ہو جائیگا۔ اس محنت سے تھوڑی بہت نجات مل سکتی ہے جیسا کہ دفعہ آئندہ سے ظاہر ہو گا۔ ہارنر کے طریقہ کے اہم ترین غلی فائدوں میں سے ایک فائدہ یہ ہے کہ اصل کے دوسرے یا تیسرے (بعض اوقات صرف پہلے) ہندسہ کے بعد خود استحالہ شدہ مساوات سے صرف آزمائش کے ذریعہ بعد کے ہندسہ کا علم ہو جاتا ہے۔ اس اصول کو اب واضح کیا جائیگا۔

۱۰۹۔ آزمائشی مقسوم علیہ کا اصول - دفعہ ۷ - ۱ میں ہم نے

(231)

یہ دیکھا ہے کہ جب کسی مساوات کو لا کی بجائے ۱ + ۷ درج کر کے تحصیل کیا جاتا ہے جہاں ۱ ایسا عدد ہے جو صحیح اصل سے بقدر ۷ کے (جو بلحاظ ۱ کے چھوٹا ہے) فرق رکھتا ہے تو ۷ کی تقریبی قیمت



ف (۱) کو ف (۱) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اب ہارنر کے طریقہ میں متواتر آئیوالی استعمال شدہ مساواتیں اس قسم کے استعمالوں کا نتیجہ ہوتی ہیں جنہیں آخری سرف (۱) اور آخر سے دوسرا سرف (۱) ہوتا ہے (دیکھو دفعہ ۳۳)۔ پس عمل کی دو یا تین منزلیں طے ہونیکے بعد جس اصل کا باقی حصہ معلوم شدہ حصہ کے ساتھ چھوٹی نسبت رکھے تو آخری استعمال شدہ مساوات کے آخری سر کو آخر سے دوسرے سر سے تقسیم کرنے سے اصل کے مزید دو یا تین ہندسے صحیح طور پر حاصل ہونے کی ہم امید کر سکتے ہیں۔ اس لئے اگر ہم چاہیں تو ہارنر کے طریقہ میں عمل کے کسی منزل پر اصل کا مزید تقرب حاصل کرنے کی خاطر نیوٹن کا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ ہارنر کے طریقہ میں یہ اصول اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جب اصل کے معلوم شدہ ہندسوں کے بعد آنے والے ہندسہ کا پتہ لگانا مقصود ہو۔ ہر استعمال شدہ مساوات کے آخر سے دوسرے سر کو ہم آزمائشی مقسوم علیہ

کے نام سے موسوم کرینگے۔ مثلاً دفعہ مابقی کی دوسری مثال میں عدد ۵ کا پتہ آزمائشی مقسوم علیہ ۲۶۹۰۸۰۰ سے صحیح طور پر لگ جاتا ہے۔ اس مثال میں پہلی استعمال شدہ مساوات کے آزمائشی مقسوم علیہ سے اصل کا دوسرا ہندسہ بھی ٹھیک طور پر معلوم ہو جاتا ہے اگرچہ بالعموم ایسا نہیں ہوتا۔ طالب علم کو استعمال شدہ مساوات کے صدر (Leading) سروں کے ممکن اثر کا اندازہ لگانا ہوگا۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ ان رمتوں کا اثر کم سے کم تر ہوتا جائیگا جیسے جیسے اصل کے ہندسے یکے بعد دیگرے حاصل ہوتے جائینگے۔

مثالیں

$$1 - مساوات \quad 1 + 2 + 3 + \dots = 100$$



(282)

کی مثبت اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے کہ اصل ۴ اور ۵ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ ہم عمل حساب لکھ لیتے ہیں اور پھر اس پر تنقید کرینگے:-

(۴۵۲۶۴۴)

|             |             |       |   |
|-------------|-------------|-------|---|
| ۱۰۰۰-       | ۱           | ۱     | ۱ |
| ۸۴          | ۲۰          | ۲     |   |
| ۱۶۰۰۰-      | ۲۱          | ۵     |   |
| ۱۱۹۲۸       | ۳۶          | ۲     |   |
| ۴۰۰۰۰۰۰-    | ۵۰۰۰        | ۹     |   |
| ۳۰۸۸۳۰۶     | ۲۶۴         | ۲     |   |
| ۲۸۳۶۲۴۰۰۰۰- | ۵۹۶۴        | ۱۳۰   |   |
| ۲۵۶۰۰۰۰۰۰۰۰ | ۲۶۸         | ۲     |   |
| ۲۰۵۵۲۲۵۶-   | ۶۲۳۲۰۰      | ۱۳۲   |   |
|             | ۸۱۹۶        | ۲     |   |
|             | ۶۳۱۳۹۶      | ۱۳۴   |   |
|             | ۸۲۳۲        | ۲     |   |
|             | ۶۳۹۶۲۸۰۰    | ۱۳۶۰  |   |
|             | ۵۵۱۳۶       | ۶     |   |
|             | ۶۴-۱۰۰۰۰۰۰۰ | ۱۳۶۶  |   |
|             | ۵۵۱۵۲       | ۶     |   |
|             | ۶۴-۰۰۰۰۰۰۰۰ | ۱۳۷۲  |   |
|             |             | ۶     |   |
|             |             | ۱۳۷۸۰ |   |
|             |             | ۲     |   |
|             |             | ۱۳۷۸۲ |   |
|             |             | ۲     |   |
|             |             | ۱۳۷۸۸ |   |
|             |             | ۲     |   |
|             |             | ۱۳۷۹۲ |   |

پہلے اصلوں کو بقدر ۴ کے گھٹاؤ۔ اب چونکہ اعشاری حصہ ظاہر ہونے کو ہے



اس لئے استحالہ شدہ مساوات کے سروں کو دفعہ ۸-۱۰ مثال ۲ میں بتلائے ہوئے طریقہ کی بموجب صفر لگاؤ۔ سر ۱۳۰۰۰ + ۵۰۰ کے مقابلہ میں چھوٹا ہے اس لئے ہم یہ امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے اصل کے دوسرے ہندسہ کا پتہ مل سکتا ہے۔ اس بات کا خیال رہے کہ ہر صورت میں جس ہندسہ کو اصل کے حصہ کے طور پر ہم اختیار کر رہے ہوں گے وہ ایسا بڑے سے بڑا عدد ہونا چاہیے جو استحالہ کے عمل میں مطلق رقم کی علامت کو تبدیل نہیں کرتا۔ یہاں ایسا عدد ۲ ہے۔ استحالہ شدہ مساوات

$$۱۳۰۰۰ + ۵۰۰ - ۱۶۰۰۰ =$$

کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے میں مطلق رقم اپنی علامت برقرار رکھتی ہے (-۱۶۰۰۰)۔ اگر ہم ہندسہ ۳ کو اختیار کرتے تو مطلق رقم مثبت ہو جاتی جو اس بات کی علامت ہے کہ ہم اصل سے آگے ہو گئے ہیں۔ ہمیں اس بات کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ پہلے استحالہ کے بعد (اس قید کا سبب مثال آئندہ میں نظر آئیگا) مطلق رقم پورے عمل میں اپنی علامت برقرار رکھے۔ اگر ہم نے سہواً بہت چھوٹا ہندسہ اختیار کیا ہے تو خطا خود طناً ہر ہو جائیگی جیسا کہ معمولی تقسیم یا جذر نکالنے کے عمل میں ہوا کرتا ہے کیونکہ ایسی صورت میں اس کے بعد آئینوالا ہندسہ ۹ سے بڑا ہوگا۔ ایسی غلطی ہونی کا احتمال بالعموم بہت کم ہے۔ لیکن ایسی خطا کثرت سے واقع ہوتی ہے جو ضرورت سے بڑے ہندسہ کے لینے میں سرزد ہوتی ہے اور اس خطا کا پتہ مطلق رقم کی علامت بدل جانے سے چل جائیگا۔ اوپر کے عمل حساب میں پانچویں استحالہ کو کام میں لائے بغیر یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ حل کا پانچواں ہندسہ ۴ ہے چنانچہ مطلوبہ اصل اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک ۴، ۲، ۶، ۴ ہے۔

۲ — مساوات

$$۴ + ۲ - ۴ - ۱۱ + ۴ =$$



154949)

[illegible]



(234)

پانچویں استحالہ کی تکمیل کے بغیر ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اصل کا پانچواں ہندسہ ۹ ہے۔ اس لئے اعشاریہ کے چار صحیح مقامات تک اصل کی قیمت ہے ۱۹۶۳۶۹۔ دوسرے استحالہ کے بعد سے آزمائشی مقسوم علیہ موثر ہو جاتا ہے چنانچہ اس سے عدد ۳ ٹھیک طور پر معلوم ہوتا ہے اور پھر اصل کے دیگر ہندسے بھی پہلی استحالہ شدہ مساوات کی آخری دو رقمیں منفی ہیں۔ اس لئے ہم اس بات کی امید کر سکتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ سے قبل کے سروں کا اثر آزمائشی مقسوم علیہ کی بہ نسبت زیادہ ہوتا چاہئے جیسا کہ اس صورت میں یہ امر واقعہ ہے۔ ہندسہ ۶ جو اصل کا دوسرا ہندسہ ہے اندراج کے ذریعہ معلوم کرنا چاہئے۔ ہمیں اس بات کی تعین کرنی ہوگی کہ مساوات

$$لا^۲ + لا^۸ + لا^۱۲ - لا^۳ - لا^۶ = ۰$$

کی اصل کا صفر اور ۱۰ کے درمیان محل وقوع کیا ہے۔ چند آزمائشوں سے معلوم ہو جائیگا کہ ۶ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اور ۷ سے مثبت۔ پس اصل ۶ اور ۷ کے درمیان واقع ہے اور ۶ وہ ہندسہ ہے جس کی ہمیں جستجو ہے۔ اس کے بعد کے ہندسوں کے لئے ہم وہ بڑے سے بڑے ہندسے ۳، ۶، ۹ لیتے ہیں جو مطلق رقم کی منفی علامت کو تبدیل نہیں کرتے۔ پہلے استحالہ میں اصولوں کو بقدر ایک کے گھٹانے میں مطلق رقم کی علامت بدل جاتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم صفر اور ایک کے درمیان والی اصل سے گزر چکے ہیں کیونکہ صفر سے مثبت نتیجہ ۴ حاصل ہوتا ہے اور ایک سے منفی نتیجہ -۶۔ باقی تمام استحالوں میں جب تک کہ ہم اصل کے نیچے رہتے ہیں مطلق رقم کی علامت وہی ہونی چاہئے جو ایک کے اندراج سے حاصل ہوتی ہے اور یہ فی الحقیقت اس بات کا فرض کر لینا ہے کہ کوئی اصل ایک اور اس ہندسہ کے درمیان واقع نہیں ہوتی جس کی ہمیں تلاش ہے۔ یہ مفروضہ سوال کی عبارت سے ہی ظاہر ہے۔ واقعہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات کی دو اصلیں مثبت ہیں۔ ان میں سے ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے اور اسلئے صرف ایک ۱ اور ۲ کے درمیان ہوگی۔



اگر ہارنر کے طریقہ میں مستعمل حدود کے اندر دو اصلیں موجود ہوں یعنی اگر مساوات کی اصلوں کا ایک زوج تقریباً مساوی ہو تو چند پیش بینیوں کی ضرورت پڑتی ہے جنکو کسی آئندہ دفعہ میں بیان کیا جائیگا۔

۳۔ مثال مابقی کی وہ اصل اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔ ۱۰ سے ضرب دیکرا پنے عمل کی ابتدا کرو تو سر ہونگے

$$۱ \quad ۲۰ \quad ۲۰۰ \quad ۲۰۰۰ \quad ۱۱۰۰۰ \quad ۲۰۰۰۰$$

چونکہ صدر سر متقابلاً چھوٹے ہیں اس لئے آزمائشی مقسوم علیہ فوراً موثر ہو جاتا ہے۔ مطلق رقم کی مثبت علامت پورے عمل میں برقرار رہنی چاہئے۔  
جواب :- ۰.۵۳۳۷۳

۴۔ مساوات

$$۱۰۰۰۰ - ۵۷۵۰ + ۳۰۰ = ۱۰۰۰۰$$

کی وہ اصل اعشاریہ کے تین مقامات تک معلوم کرو جو ۹ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے۔  
[۱۰ کا صفر شامل کرو] جواب :- ۹۹۸۸۶

ابتداءً جن مثالوں پر غور کیا گیا ہے ان میں اصل کو اعشاریہ کے صرف چند مقامات تک معلوم کیا گیا تھا۔ اب ہم ایسا طریقہ بیان کریں گے جس کی مدد سے تین یا چار اعشاریہ کے مقامات تک اصل کو اوپر کے طریقہ سے معلوم کرنے کے بعد متعدد اور ہند سے ایک مختصر عمل سے بہت آسانی کے ساتھ ٹھیک طور پر حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

۱۱۔ ہارنر کے عمل کا اختصار۔ اجمالی تقسیم کے معمولی عمل میں

جب دئے ہوئے ہند سے ختم ہو جاتے ہیں تو یکے بعد دیگرے انہوے مقسوموں کو صفر لگاتے کی بجائے ہم مقسوم علیہ کے ہندسوں کو یکے بعد دیگرے سیدھی طرف سے کاٹتے جاتے ہیں اس طور پر کہ خود مقسوم علیہ چند منزلوں کے بعد جو اس کے ہندسوں کی تعداد پر منحصر ہوتی ہیں ختم ہو جاتا ہے



اس طور پر جو خارج قسمت حاصل ہوتا ہے وہ اصلی خارج قسمت سے صرف آخری ہندسہ میں یا زیادہ سے زیادہ آخری دو ہندسوں میں فرق رکھینگا۔ ہارنر کے اجمالی عمل میں بھی یہی اصول ہے۔ ہم صرف وہ ہندسے برقرار رکھتے ہیں جو نتیجہ کو تقرب کے مطلوبہ درجہ تک حاصل کرنے میں موثر ہوں۔ جب اجمالی عمل شروع ہوتا ہے تو استحالة شدہ مساوات کے متواتر سروں کو قبل الذکر طریقہ پر صفر لگانے کی بجائے ہم آخر سے دوسرے سر کے سید ہی طرف والے ایک ہندسہ کو آخر سے تیسرے سر کے سید ہی طرف والے دو ہندسوں کو آخری سے چوتھے سر کے سید ہی طرف والے تین ہندسوں وغیرہ کو کاٹ دیتے ہیں۔ اس کا اثر یہ ہوگا کہ عمل میں اہم ہندسے اپنی اپنی خاص جگہ پر قائم رہیں گے اور غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جائیں گے۔

طالب علم کے لئے بہتر یہ ہوگا کہ وہ ذیل کی مثالوں میں پہلی مثال میں اجمالی طریقہ سے حاصل کئے ہوئے پہلے استحالة کا مقابلہ اس متناظر استحالة کے ساتھ کرے جو دفعہ ماسبق کی دوسری مثال میں مکمل طور پر حاصل کیا گیا ہے۔ تب اسکو معلوم ہو جائیگا کہ کس طرح صدر ہند سے (یعنی وہ ہندسے جو نتیجہ کے حاصل کرنے میں اہم ترین حصہ لیتے ہیں) دونوں صورتوں میں منطبق ہوتے ہیں اور اپنے اضافی مقامات برقرار رکھتے ہیں حالانکہ غیر اہم ہندسے کلاً خارج ہو جاتے ہیں۔

اس اختصار کے علاوہ جو اوپر بیان ہوا ہارنر کے عمل کے دیگر اختصاروں کی بھی بعض اوقات سفارش کی جاتی ہے لیکن اہم انکا ذکر کرنا اس وجہ سے ضروری نہیں سمجھتے کہ ان سے بہت کم فائدہ حاصل ہوتا ہے اور نیز غلطی کے احتمالات بڑھ جاتے ہیں۔ متذکرہ بالا اختصار ہارنر کے طریقہ تقرب میں استعدراہم تھا کہ اس طریقہ کا ذکر بغیر اس کو بیان کئے ہوئے غیر مکمل رہ جاتا۔



## مثالیں

۱۔ دفعہ ماضی کی مثال ۲ میں جو مساوات درج ہے اس کی وہ اصل اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کر دو جو ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ اس مثال کے نتیجہ کو تسلیم کر کے ہم اجمالی عمل تیسرے استحالہ کی تکمیل کے بعد سے شروع کرینگے چنانچہ اس استحالہ کے بعد کا عمل ذیل میں درج ہے:-

$$\begin{array}{r}
 ۱۷۵۲ \quad ۳۱۵.۶۴ \quad ۲۵۱۶۵۷۸۸ \\
 \hline
 ۱۵۲۱۳.۹۰ \quad ۱۸۹۳۶ \quad ۶ \\
 ۲۳۳۶۳۲۹- \quad ۲۵۳۵۵۱۵ \quad ۳۱۵۶ \\
 \hline
 ۲۳۰۱۵۹۷ \quad ۱۸۹۷۲ \quad ۶ \\
 \hline
 ۳۲۷۵۲- \quad ۲۵۵۲۲۸۴ \quad ۳۱۶۲ \\
 \hline
 ۲۵۶۰۱ \quad ۲۸۵ \quad ۶ \\
 \hline
 ۹۱۵۱- \quad ۲۵۵۷۳۳ \quad ۳۱۴۸ \\
 \hline
 ۷۶۸۰ \quad ۲۸۵ \\
 \hline
 ۱۴۷۱- \quad ۲۵۶۰۱۸ \quad ۳۴ \\
 \hline
 ۱۲۸۰ \\
 \hline
 ۱۹۱- \\
 \hline
 ۱۷۹ \\
 \hline
 ۱۲
 \end{array}$$

یہاں ہندسوں کو کاٹ دینے کے پہلے عمل سے یعنی آخر سے دوسرے سر سے ۸، آخر سے تیسرے سر سے ۱۲، آخر سے چوتھے سر سے ۵۲۔ کو خارج کر دینے سے چار درجہ کا پہلا سر صرف ایک رہ جاتا ہے۔ اب ہم اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹاتے ہیں گویا کہ سرا ۳۱۵، ۲۵۱۶۵۷۸۸، ۱۷۵۲ کو جو باقی رہ جاتے ہیں کبھی مساوات کے سر ہیں۔ اصل کے ایسے ہندسہ سے



ضرب دینے میں منقطع ہندسوں کو ذہن میں ضرب دے لینا چاہئے تاکہ حاصل کے ہندسہ کو حساب میں شامل کیا جاسکے جیسا کہ مختصر تقسیم میں کیا جاتا ہے۔

جب اصلوں کو بقدر ۶ کے گھٹانے کا عمل مکمل ہو جائے تو استحالہ شدہ کعبی میں پھر ہم آخر سے دوسرے سرے سے، آخر سے تیسرے سرے سے ۶۸، قطع کرتے ہیں اور پہلا سر بالکل غائب ہو جاتا ہے۔ عمل پھر اس طور پر جاری رہتا ہے گویا صرف دو درجی کے سروں ۳۱، ۲۵۵، ۲۲۸، ۲۹، ۶۳، ۳۳، ۲۳ سے واسطہ ہے۔ ہندسوں کو پھر قطع کرنے کے عمل کا اثر یہ ہو گا کہ سر ۳۱ بالکل خارج ہو جائیگا۔ بعد کا عمل اجمالی تقسیم کے عمل کے مماثل ہو جاتا ہے۔ جب عمل ختم ہو جاتا ہے تو خارج قسمت میں اعشاری ہندسوں کی تعداد آخر کے دو یا تین ہندسوں تک صحیح خیال کیجا سکتی ہے اجمالی عمل شروع کرنے سے پیشتر اصل کو جس حد تک معلوم کرنا پڑتا ہے وہ اعشاریہ کے مطلوبہ مقامات کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے کیونکہ اجمالی عمل شروع ہو جانے کے بعد معلومہ ہندسوں کے علاوہ ہمیں ہندسوں کی اتنی تعداد جو آزمائشی مقوم علیہ کے ہندسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے کم ہے حاصل ہوگی۔

۲۔ مساوات

$$لا - ۱۲ لا + ۷ = ۰$$

کی وہ اصل جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے اعشاریہ کے سات یا آٹھ مقامات تک معلوم کرو۔

(237) اس مساوات کی صرف دو مثبت اصلیں ہو سکتی ہیں ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان واقع ہوتی ہے اور دوسری ۲ اور ۳ کے درمیان۔ دو سری کو معلوم کرنے کے لئے ہم



ذیل کا عمل کرتے ہیں :-

|               |          |        |        |     |
|---------------|----------|--------|--------|-----|
| ۲۵-۴۴۲۴۵۵۶۷۱) | ۷        | ۱۲-    | ۰      | ۰   |
| ۸۳۸۹۱۲۵۶      | ۸-       | ۸      | ۴      | ۲   |
| ۱۶۱۰۸۵۴۴-     | ۲۴       | ۲-     | ۲      | ۲   |
| ۱۵۴۹۳۴۰۱      | ۲۰۰۰۰۰۰۰ | ۲۴     | ۸      | ۲   |
| ۶۱۵۱۴۳-       | ۹۴۲۸۶۴   | ۱۲     | ۱۲     | ۲   |
| ۴۴۶۲۶۲        | ۲۰۹۴۲۸۶۴ | ۲۴۰۰۰۰ | ۶      | ۲   |
| ۱۶۸۸۸۱-       | ۹۸۵۷۹۲   | ۳۲۱۶   | ۲۴۳۲۱۶ | ۸۰۰ |
| ۱۵۶۲۲۶        | ۲۱۹۵۸۶۵۶ | ۳۲۳۲   | ۲۴۶۴۲۸ | ۸۰۴ |
| ۱۲۶۵۵-        | ۱۷۴۷۸    | ۲۴۶۴۲۸ | ۳۲۲۸   | ۲   |
| ۱۱۱۵۹         | ۲۲۱۳۳۴۳  | ۳۲۲۸   | ۲۴۹۶۹۶ | ۸۰۸ |
| ۱۴۹۶-         | ۱۷۴۷۸    | ۲۴۹۶   | ۲۴۹۶   | ۲   |
| ۱۳۳۸          | ۲۲۳۰۸۲۴  | ۲۴۹۶   | ۲۴۹۶   | ۸۱۲ |
| ۱۵۸-          | ۲۹       | ۲۴۹۶   | ۲۴۹۶   | ۲   |
| ۱۵۶           | ۲۲۳۱۳۱   | ۲۴۹۶   | ۲۴۹۶   | ۸۱۲ |
| ۲             | ۲۹       | ۲۴۹۶   | ۲۴۹۶   | ۲   |
|               | ۲۲۳۱۸۰   | ۲۴۹۶   | ۲۴۹۶   | ۸۱۲ |

یہاں اصولوں کو بقدر ۲ کے گھٹانے کے بعد اور استحالہ شدہ مساوات کی  
 اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دینے سے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ آزمائشی مقسوم علیہ  
 ۲۰۰۰۰، مطلق رقم ۱۰۰۰۰ کو تقسیم نہیں کر سکتا۔ اس لئے ہم خارج قسمت  
 میں صفر رکھتے ہیں اور پھر اصولوں کو ۱۰ سے ضرب دیتے ہیں۔ باقی کا عمل  
 حسب سابق کیا گیا ہے۔

۳۔ اسی مساوات کی وہ اصل معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان  
 واقع ہے۔



۴۔ مساوات

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۱۱۶۱۹۰۳۲۲۲

۵۔ مساوات

کی منفی اصل اعشاریہ کے سات مقامات تک معلوم کرو۔

جب متفی اصل معلوم کرنا مطلوب ہو تو لا کی علامت بدل دینے اور استحال شدہ مساوات کی متناظر مثبت اصل معلوم کرنے میں سہولت ہوگی۔

جواب :- ۳۶۹.۷۳۷۸۵

۱۱۱۔ ہارٹر کے طریقہ کا استعمال ایسی صورتوں میں جہاں (238)

اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔ دفعہ ۷۰ میں ہم نے یہ دیکھا ہے کہ تقریب کا وہ طریقہ جو وہاں بیان ہوا انا کام رہتا ہے جب مجوزہ مساوات کی دو اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔ اس نوعیت کی مثالیں اپنی تحلیل (دیکھو مثال ۷ دفعہ ۹۸) اور اپنے حل دونوں میں سب سے زیادہ مشکلیں پیدا کرتی ہیں۔ ہارنر کے طریقہ سے ایسی مساواتوں کا حل معلوم کرنا ممکن ہے اگرچہ دوسری صورتوں کی بہ نسبت ہیں ذرا زیادہ محنت کرنی پڑتی ہے۔ جب تک کہ دونوں اصلوں کے صدر ہند سے ایک ہی رہتے ہیں اس وقت تک چند پیش بند یوں کی پیش نظر رکھنا ضروری ہے۔ یہ پیش بندیاں ذیل کی مثالوں سے ظاہر



ہو جائیگی۔ دونوں اصولوں کو جدا کرنے کے بعد عمل حساب ہر ایک کے لئے جداگانہ طور پر دفعات سابق کی مثالوں کی طرح کیا جاتا ہے۔ دفعہ ۱۰۹ میں آزمائشی مقسوم علیہ کی جو تشریح کی گئی ہے اس سے یہ ظاہر ہے کہ زیر بحث صورت میں بیویں کا طریقہ جس سبب سے ناکام رہتا ہے (دفعہ ۱۰۹) اسی سبب سے آزمائشی مقسوم علیہ اس وقت تک موثر نہیں ہوگا جب تک کہ اصولوں کو جدا کرنے کے بعد پہلی یا دوسری منترل کی تکمیل نہ ہو جائے۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ - ۷ لا + ۷ = ۰$$

کی دو اصلیں ۱ اور ۲ کے درمیان ہیں (دیکھو مثال ۲ دفعہ ۹۶)۔ ہر ایک اصل اعشاریہ کے ۸ مقامات تک معلوم کرو۔  
اصول کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات (ان اصولوں کو ۱ سے ضرب دینے کے بعد) یعنی

$$لا^۳ + ۳۰ لا^۲ - ۴۰۰ لا + ۱۰۰۰ = ۰$$

کی دو اصلیں صفر اور ۱۰ کے درمیان ہونی چاہئیں۔ ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ اصلیں واقع ہوتی ہیں ایک تو ۳ اور ۴ کے درمیان اور دوسری ۶ اور ۷ کے درمیان۔ اب اصلیں جدا ہو جاتی ہیں اور ہم ہر ایک کے دریافت کر نہیں وہی عمل اختیار کرتے ہیں جو پہلے بیان ہو چکا ہے۔ اگر اس منترل پر اصلیں جدا نہ ہوتیں تو ہم وہ صدر ہندسہ معلوم کرتے جو دونوں میں مشترک ہوتا اور پھر اصولوں کو بقدر اس ہندسہ کے گھٹانے کے بعد یہ دیکھتے کہ استحالہ شدہ مساوات کی اصلیں کن وقفوں کے درمیان واقع ہوتی ہیں اور علیٰ ہذا القیاس

جواب :- ۱۵۳۵۶۸۹۵۸۴ - ۲۱۴۷۰۲۱۹۲۰

۲۔ مساوات

$$لا^۳ - ۴۹ لا^۲ + ۶۵۸ لا - ۱۳۷۹ = ۰$$



کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان واقع ہیں -  
 ان میں سے چھوٹی اصل کے لئے تقرب کا مکمل عمل اعشاریہ کے مقامات تک بتایا جائیگا اور پھر چند مشاہدات کئے جائینگے تاکہ طالب علم کو اس قسم کی تمام صورتوں میں مدد مل سکے -

|            |           |           |       |
|------------|-----------|-----------|-------|
| ۲۳۰۲۱۳۱۲۶۷ | ۱۳۷۹-     | ۶۵۸       | ۲۹-   |
|            | ۱۵۶۰      | ۵۸۰-      | ۲۰    |
|            | ۱۸۱       | ۷۸        | ۲۹-   |
|            | ۱۸۰-      | ۱۸۰-      | ۲۰    |
|            | ۱۰۰۰      | ۱۰۲-      | ۹-    |
|            | ۹۹۲-      | ۲۲        | ۲۰    |
|            | ۸۰۰۰      | ۶۰-       | ۱۱    |
|            | ۶۷۳۹-     | ۵۱        | ۳     |
|            | ۱۲۶۱۰۰۰   | ۹۰۰-      | ۱۲    |
|            | ۱۲ ۱۷۲۰۳- | ۲۰۲       | ۳     |
|            | ۲۳۵۹۷     | ۲۹۶-      | ۱۷    |
|            | ۳۲۱۸۳-    | ۲۰۸       | ۳     |
|            | ۹۲۱۲      | ۸۸۰۰-     | ۲۰۰   |
|            | ۶۷۸۶-     | ۲۰۶۱      | ۲     |
|            | ۲۶۲۸      | ۶۷۳۹-     | ۲۰۲   |
|            | ۲۳۷۲      | ۲۰۶۲      | ۲     |
|            | ۲۵۶       | ۲۶۷۷۰۰-   | ۲۰۲   |
|            | ۲۳۶-      | ۶۱۸۹۹     | ۲     |
|            | ۲۰        | ۲۰۵۸۰۱-   | ۲۰۶۰  |
|            |           | ۶۱۹۰۸     | ۱     |
|            |           | ۳۲۳۸۹۲-   | ۲۰۶۱  |
|            |           | ۲۰۶       | ۱     |
|            |           | ۳۲۱۸۳-    | ۲۰۶۲  |
|            |           | ۲۰۶       | ۱     |
|            |           | ۳۳۹۷۷-۲۶۶ | ۲۰۶۳۰ |
|            |           | ۲         | ۳     |
|            |           | ۳۳۹۳-     | ۲۰۶۳۳ |
|            |           | ۲         | ۳     |
|            |           | ۳۳۸۹-۲    | ۲۰۶۳۶ |
|            |           |           | ۳     |
|            |           |           | ۲۰۶۳۹ |

(239)



اصولوں کو بقدر ۲۰ کے گھٹانے سے مطلق رقم کی علامت بدلتی ہے  
یہ اس بات کی علامت ہے کہ ایک اصل صفر اور ۲۰ کے درمیان واقع  
ہے جس سے فی الحال ہمیں کوئی تعلق نہیں۔ پہلی استحالہ شدہ مساوات  
$$لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۸۱$$

کی اصلیں تاہم جدا نہیں ہوئیں کیونکہ دونوں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع  
ہوتی ہیں۔ ان دونوں عددوں کے اندراج سے مثبت نتیجہ حاصل ہوتا  
ہے اور اس لئے یہاں ہمیں وہ معیار نہیں ملتا جو کھلی مثالوں میں مخصوص  
ہندسہ کی تلاش کرنے میں مدد دینے کے لئے حاصل ہوا تھا یعنی مطلق رقم  
میں علامت کی تبدیلی نہیں ملتی۔ تاہم ایک دوسرا معیار ایسا ہے جس سے  
صرف اندراج کے ذریعہ وہ وقفہ معلوم ہو سکتا ہے جس کے اندر یہ دونوں  
اصلیں واقع ہوتی ہیں۔ اگر ہم  $لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۸۱$  کی

(240)

اصولوں کو بقدر ۴ کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات  $لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۳$   
میں علامت کی کوئی تبدیلی ظہور پذیر نہیں ہوتی۔ پس یہ دونوں اصلیں صفر  
اور ۴ کے درمیان واقع ہونی چاہئیں۔ اگر ہم اس کی اصولوں کو بقدر ۳  
کے گھٹائیں تو استحالہ شدہ مساوات میں (جیسا کہ اوپر کے عمل سے ظاہر ہے)  
علامت کی تبدیلیوں کی تعداد وہی ہے جو خود مساوات میں علامت کی  
تبدیلیوں کی ہے۔ پس یہ دونوں اصلیں ۳ اور ۴ کے درمیان واقع  
ہوتی ہیں۔ اس لئے وہ اب تک جدا نہیں ہوئیں اور ہم اصولوں کو بقدر  
۳ کے گھٹاتے ہیں۔ دوسری استحالہ شدہ مساوات

$$لا + لا - لا - لا + لا + لا = ۱۰۰۰$$

میں اسی طرح دونوں اصولوں کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہوتا  
ہے کیونکہ بقدر ۲ کے گھٹانے سے استحالہ شدہ مساوات کے سروں میں علامت  
کی دو تبدیلیاں رہتی ہیں (دیکھو عمل بالا) اور بقدر ۳ کے گھٹانے سے تمام  
علامتیں مثبت حاصل ہوتی ہیں۔ چنانچہ اس حد تک دونوں اصلیں اپنے  
پہلے تین ہندسوں تک مائل ہیں یعنی ۲۴۳ تک۔ پھر ہم بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں تو



استعمال شدہ مساوات  $لا^۳ + ۲۰۶۰ لا^۲ - ۸۸۰۰ لا + ۱۲۶۱ = ۰$  کی صرف ایک اصل ۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوتی ہے کیونکہ اسے مثبت اور ۲ سے منفی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کی دوسری اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے کیونکہ ۳ سے مثبت نتیجہ ملتا ہے۔ اب اصلیں جدا ہو گئیں۔ ہم عمل بالائیں چھوٹی اصل کا تقرب اس مساوات کو بقدر ۱ کے گھٹانے سے حاصل کرتے ہیں۔ آزمائشی مقسوم علیہ دوسری منزل سے موثر ہو جاتا ہے بڑی اصل کا تقرب حاصل کرنا ہو تو اسی مساوات کی اصلوں کو بقدر ۲ کے گھٹانا چاہئے اور اس بات کی احتیاط رکھنی چاہئے کہ بعد کے اعمال میں منفی علامت جو اس احتمال کی وجہ سے مطلق رقم کی ہوگی برقرار رہے۔ یہ دوسری اصل ہوگی ۲۲۹۵۲۱۲ - ۲۳۶۔

جب تک دونوں اصلیں ایک ساتھ رہتی ہیں اصل کے مناسب ہندسہ کا پتہ آخر سے دوسرے سرے سے آخری سرے کو دو چند کر کے تقسیم کرنے سے مل سکتا ہے یا آخر سے تیسرے سرے سے آخر سے دوسرے سرے کو دو چند کر کے تقسیم کرنے سے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مجوزہ مساوات اب ایسے دو درجی کے قریب آتی ہے جو ہر احتمال شدہ مساوات کے آخری تین سروں سے بنتی ہے۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ پچھلی صورتوں میں اور نیوٹن کے طریقہ میں مجوزہ مساوات کا تقرب آخری دو سروں سے بننے والی مفرد مساوات کی شکل میں حاصل ہوا تھا۔ متذکرہ صدر دو درجی کی دونوں اصلیں مجوزہ مساوات کی وہ اصلیں ہونگی جو تقریباً مساوی ہیں اور جب مساوات  $لا^۲ + ب لا + ج = ۰$  کی دونوں اصلیں تقریباً مساوی ہوں تو انہیں سے کوئی ایک  $\frac{۲ج}{ب}$  یا  $\frac{ب}{۲ج}$  سے تقریباً

حاصل ہو جاتی ہے۔ مثلاً اوپر کی مثال میں ہندسہ ۳  $\frac{۱۸۱ \times ۲}{۱۰۲}$  سے اور

ہندسہ ۲  $\frac{۱۰۰۰ \times ۲}{۹۰۰}$  سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس طریقہ سے ہم عام



طور پر پہلی کوشش میں وہ دو ہندسے معلوم کر سکتے ہیں جن کے درمیان  
اصولوں کا زوج واقع ہے۔ نیز اس سے ہمیں اصولوں کے جدا ہونیکا  
پتہ بھی اس امر کا مشاہدہ کرنے سے لگ جاتا ہے کہ آخری تین سروں سے  
اس طور پر حاصل کئے ہوئے ہندسے کب مختلف ہوتے ہیں یعنی  
کب  $\frac{2}{b}$  اور  $\frac{b}{12}$  مختلف ہوتے ہیں۔

۳۔ مساوات

$لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ - لا - لا^۱۴۲ + لا + ۹۳۶ =$   
کی وہ اصلیں جو ۲ اور ۵ کے درمیان واقع ہیں اعشاریہ کے تین مقامات  
تک محسوب کرو۔

جواب:  $۴۵۲۴۲، ۴۵۲۴۶$

۴۔ مساوات

$۶۴ لا^۳ - لا^۲ + ۵۹۲ لا + ۱۶۴۹ لا - ۱۴۴۵ =$

کی وہ دو اصلیں معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہیں۔

جواب: دونوں اصلیں  $۲۵۱۲۵ =$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تیسرے مقام اعشاریہ تک دونوں اصلیں  
جدا نہیں ہوتیں۔ جب ہم بقدر ۵ کے گھٹاتے ہیں تو مطلق رقم معدوم  
ہوتی ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ  $۲۵۱۲۵$  ایک اصل ہے۔ پھر بقدر ۵  
کے گھٹانے سے آخر سے دوسرا سر بھی معدوم ہو جاتا ہے پس  $۲۵۱۲۵$   
دوہری اصل ہے۔

(241)

جب کسی مساوات میں دو سے زیادہ تقریباً مساوی اصلیں  
ہوں تو وہ سب ہارنر کے عمل سے متذکرہ بالا طریقہ کے ذریعہ معلوم ہو سکتی  
ہیں۔ عمل میں ایسی صورتیں بہت شاذ واقع ہوتی ہیں۔ طالب علم  
کے لئے وہ اصول جو اوپر بیان کیا گیا ہے ایسی تمام صورتوں میں رہبری  
کرنے کے لئے کافی ہے۔



۱۱۲۔ تقریب کا لگراج کا طریقہ۔ لگراج نے عددی مساوات

کی اصل کو ایک مسلسل کسر کی شکل میں بیان کرنے کا ایک طریقہ معلوم کیا ہے۔ لیکن چونکہ یہ طریقہ عملی مقاصد کے لئے بار بار کے طریقہ کے مقابلہ میں بہت ادنیٰ حیثیت رکھتا ہے اس لئے اس کا صرف مختصر ذکر کرنے پر ہم اکتفا کریں گے۔

فرض کرو کہ مساوات  $f(x) = 0$  کی ایک اور صرف ایک اصل متصلہ اعداد  $a$  اور  $b$  کے درمیان واقع ہے۔ مجوزہ مساوات میں  $a$  کی بجائے  $a + \frac{1}{n}$  درج کرو۔ مابین استحالہ شدہ مساوات کی ایک اصل مثبت ہوگی۔ فرض کرو کہ امتحان کرنے سے اس کا  $b$  اور  $a + \frac{1}{n}$  کے درمیان واقع ہوتا معلوم ہوتا ہے۔ مابین یہ جو مساوات ہے اس کو  $a = b + \frac{1}{n}$  کے اندراج سے مستحیل کرو۔

ی میں حاصل شدہ مساوات کی مثبت اصل کا  $a$  اور  $b + \frac{1}{n}$  کے درمیان واقع ہونا معلوم کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو جاری رکھنے سے اصل کا تقریب ایک مسلسل کسر کی شکل میں حاصل کیا جاتا ہے مثلاً

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \dots}}}$$

مثالیں

۱۔ مساوات

$$x^3 - 2x^2 - 5 = 0$$

کی مثبت اصل مسلسل کسر کی شکل میں معلوم کرو۔

اصل  $2$  اور  $3$  کے درمیان واقع ہے۔  $2 = 2 + \frac{1}{a}$  کا استحالہ



(242)

عمل میں لانے کے لئے اول ہم دفعہ ۳۳ کا عمل استعمال کرتے ہیں اور اصلوں کو  
 بقدر ۲ کے گھٹاتے ہیں۔ پھر ہم وہ مساوات معلوم کرتے ہیں جس کی  
 اصلیں استحالة شدہ مساوات کی اصلوں کی متکافی ہوں۔  
 اس طور پر مائیں جو مساوات حاصل ہوتی ہے وہ ہے  

$$۱۰ - ۱ - ۱۰ - ۱ = ۰$$

اسکی ایک اصل ۱۰ اور ۱۱ کے درمیان ہے۔  $۱۰ + ۱ = ۱۱$  درج  
 کرو تو ی میں مساوات حاصل ہوگی  
 $۶۱ - ۹۲ - ۲ - ۱ = ۰$   
 اسکی اصل ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔ رکھو  $۲ + ۱ = ۳$  تو  
 میں مساوات ہوگی

$۵۲ - ۲۵ - ۶ - ۸۹ - ۶۱ = ۰$   
 جس کی اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔  
 اس لئے اصل کے لئے ہمیں ذیل کا جملہ حاصل ہوتا ہے:-

$$\begin{aligned} ۱۱ &= ۲ + \frac{۱}{\dots} \\ &= ۱ + \frac{۱}{\dots} \\ &= ۱ + \frac{۱}{\dots} \\ &\dots \end{aligned}$$

۲۔ ۱۱۔ ۱۱۔ ۱۳۔ کی مثبت اصل کسر مسلسل کی شکل میں  
 معلوم کرو۔

جواب:-  $۳ + \frac{۱}{\dots}$   
 $۵ + \frac{۱}{\dots}$   
 $۱ + \frac{۱}{\dots}$

۱۱۳۔ چار درجہ کا عددی حل۔ عددی مساواتوں کے حل کا



مضمون ختم کرنے سے پیشتر چھٹے باب میں بیان کردہ حل کے طریقوں کے عملی فائدوں کا ذکر کرنا ضروری ہے۔ گو یہ بیان کیا گیا تھا کہ مساواتوں کا عددی حل اس باب کے طریقوں سے عموماً سب سے زیادہ آسانی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے لیکن ایسی صورتیں بھی ہیں جنہیں چار درجہ کے حل کے لئے چھٹے باب کے طریقوں کا استعمال کرنا سہولت بخش ہوتا ہے جب چار درجہ مساوات سے محول کعبی ملجائے جسکی ایک اصل متوافق ہو تو اس اصل کو فوراً معلوم کیا جا سکتا ہے اور چار درجہ کے حل کی تکمیل ہو سکتی ہے۔ ہم اس قسم کی چند مثالیں ڈیکارٹ کا طریقہ استعمال کر کے (صفحہ ۶۴) حل کرتے ہیں جو عموماً ایسی صورتوں میں عملی طور پر سب سے زیادہ سہولت بہم پہنچاتا ہے۔

## مثالیس

۱۔ چار درجی

$$y - y_{22} + y_{23} + y_{34} - y_{45}$$

کو دو درجی اجزاء میں تحلیل کرو۔

دفعہ ۶۴ کا مفروض اختیار کرنے سے ہم آسانی کے ساتھ حاصل کر لیتے

ف + ف = ۳، ق + ق = ۴، ف + ق = ۳، ف + ق = ۱۱

قق = ۶

نیز  $\frac{1}{f} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f} = \frac{1}{f} (1 - 1)$

ع اور جے کو محسوب کرنے سے فہ کے لئے مساوات ملتی ہے

$$= \frac{225}{1} - \frac{111}{2} - \frac{30}{3}$$

اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور رکھو ۴ نہ = ت تو

ت<sup>۳</sup> - ۱۱ ت - ۴۵ = .

اب مقصود علیہم کے طریقہ سے یہ بہ آسانی معلوم ہوتا ہے کی اسکی



ایک اصل - ۶ ہے پس فہ = ۳ جس سے

$$ف فہ = ۲، ق + ق = ۵$$

ان کو اوپر کی مساواتوں کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو

$$ف = ۲، فہ = ۱، ق = ۱، ق = ۱، ق = ۱$$

جب ق اور ق کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں تو وہ مساوات جس سے  
ف ق + ق فہ کی قیمت حاصل ہوتی ہے اس بات کا تعین  
کریں گی کہ ق کی کوئی قیمت ف کے ساتھ اور کوئی ف کے ساتھ  
لینی چاہئے۔ اس لئے مجوزہ چار درجہ ذیل کے اجزاء میں تحلیل ہو جاتا

$$(لا - ۴ لا + ۱) (لا - ۲ لا - ۶)$$

فہ کی دوسری دو قیمتوں کے ذریعہ ہم چار درجہ کو دو اور طریقوں  
تحلیل کر سکتے ہیں یا ہم اسی عمل کو محصلہ دو درجہ کے حل کرنے سے مکمل  
کر سکتے ہیں۔

$$۲ - چار درجہ ف (لا) = لا - لا - لا - لا + لا + لا + لا$$

کو اجزاء کے ضربی میں تحلیل کرو۔

فہ کے لئے مساوات ہے

$$۴ فہ - ۱۹۵ فہ - ۴۷۵ = ۰$$

جسکی ایک اصل - ۵ ہے۔

$$جواب :- ف (لا) = (لا - لا - لا) (لا - لا - لا)$$

$$۳ - ف (لا) = لا - لا - لا - لا - لا - لا$$

کو اجزاء کے ضربی میں تحلیل کرو۔

محول کبھی ہے

$$۴ فہ - ۲۱۷ فہ + \frac{۳۱۸۵}{۲۱۷} = ۰$$

یا اصلوں کو ۶ سے ضرب دینے سے

$$۴ ت - ۶۵۱ ت + ۳۱۸۵ = ۰$$



اسکی ایک اصل ہے۔ پس  $ف = \frac{۴}{۳}$   
 جواب :-  $ف (لا) = (لا^۲ + لا + ۲)(لا - لا^۲ - ۳)$

$$۴ - ۲ (لا) = لا^۲ - لا - ۲ = لا^۲ + لا + ۲ - لا^۲ - لا - ۲ = ۲۲$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔  
 محمول کبھی ہے

$$۴ ف - ۳ = \frac{۳۳۵}{۲} ف - \frac{۸۹۷}{۸} =$$

$$ف = \frac{۳}{۲}$$

جواب :-  $ف (لا) = (لا - لا^۲)(۲ + لا - لا^۲)$

$$۵ - ۲ (لا) = لا^۲ - لا - ۲ = لا^۲ + لا + ۲ - لا^۲ - لا - ۲ = ۱۴$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جواب :-  $ف (لا) = (لا - لا^۲)(۲ + لا - لا^۲)$

$$۶ - ۲ (لا) = لا^۲ + لا + ۳$$

کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

جواب :-  $(لا - لا^۲ + لا + ۳)(لا + لا^۲ - ۳ + لا)$

$$۷ - ۲ (لا) = لا^۲ - لا - ۲ = لا^۲ + لا + ۲ - لا^۲ - لا - ۲ = ۶۳$$

کے دو درجہ اجزاء معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو (دیکھو مثال ۱۸ صفحہ ۴۳)

جواب :-  $\{ لا - لا^۲ + لا + ۲ \} \{ لا^۲ - لا - ۲ \}$

$$\{ لا^۲ - لا - ۲ \}$$

متفرق مثالیں

$$۱ - لا^۲ - لا - ۱۳ =$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔



جواب :- ۳۹۳۱۲۸۶۷۱۷۳۹۳

$$لا^۲ - لا - ۵ = ۰$$

۲ کی مثبت اصل اعشاریہ کے ۸ یا ۹ مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۳۹۳۱۲۸۶۷۱۷۳۹۳

۳ — مساوات

$$لا^۲ - لا - ۶۸ - ۶۵ - لا + ۵ - لا - ۱۶۲۷ = ۰$$

۳ کی ایک اصل ۳۰۰ اور ۴۰۰ کے درمیان ہے۔ اسکو معلوم کرو۔

جواب :- متوافق اصل ۳۲۵۶۴

۴ — مساوات

$$لا^۳ - لا - ۱۸۰ - لا + ۱۸۹۶ - لا - ۲۵۷ = ۰$$

کی وہ اصل معلوم کرو جو ۲۰ اور ۳۰ کے درمیان ہے۔

جواب :- ۲۸۶۵۲۱۲۷۷۳۸

۵ — مساوات

$$لا^۳ - لا - ۴۹ - لا + ۶۵۸ - لا - ۱۳۷۹ = ۰$$

کی وہ اصل اعشاریہ کے چھ مقامات تک معلوم کرو جو ۲ اور ۳ کے درمیان ہے۔

جواب :- ۲۶۵۵۷۳۵۱

۷ — مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا - ۲۳ - لا - ۷۰ = ۰$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے تقریباً ۱۰ مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۵۶۱۳۴۵۷۷۸۷۲۵۲۸

۸ — ۱۲۵ - ۳۰۹ - ۳۳۷ - ۶ کا جذر الکعب معلوم کرو۔

جواب :- ۸۷۶۵

۹ — ۵۳۷۸۲۲ کا پانچواں جذر معلوم کرو۔

جواب :- ۱۴

۱۰ — کبھی مساوات



$$\text{لا}^3 - \text{لا}^2 + 1 = 0$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

مثال ۱۲۶ صفحہ ۱۲۶ کی مساوات  $\text{لا}^3 + \text{لا}^2 + 1 = 0$  مساوات

بالا میں تحویل ہوتی ہے۔

جواب :-  $1584938, 637429, 153209$

چھوٹی مثبت اصل سے ذیل کے مسئلہ کا حل ملتا ہے :- ایک نصف

کرہ کو جس کا نصف قطر اکائی ہو دو مساوی حصوں میں قاعدے کے

متوازی مستوی سے تقسیم کرنا۔

$$\text{لا}^3 + \text{لا}^2 - \text{لا} - 1 = 0$$

(دیکھو مثال ۱۲۵ صفحہ ۱۲۵)

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :-  $192, 158, 64502, 1522698$

(246)

۱۲۔ مساوات

$$\text{لا}^5 + \text{لا}^4 - \text{لا}^3 - \text{لا}^2 + \text{لا} + 1 = 0$$

کی منفی اصل ۱ اور صفر کے درمیان، اعشاریہ کے ۵ مقامات تک

معلوم کرو (دیکھو مثال ۱۲۶ صفحہ ۱۲۶)

جواب :-  $0.628263$

۱۳۔ مساوات

$$\text{لا}^5 - 15\text{لا}^4 - 192\text{لا}^3 + 24\text{لا}^2 - 29 = 0$$

کو حل کرو۔

ہم یہاں یہ دیکھتے ہیں کہ ایک اصل ۷۰ اور ۸۰ کے درمیان ہے۔

بارنر کے عمل سے اس اصل کا ۸ ہونا معلوم ہوتا ہے۔

دو اصلیں ملتی ہیں جن کو بقدر ۸ کے بڑا دیا جائے تو کبھی کی باقی دو اصلیں

حاصل ہوتی ہیں۔

جواب :-  $8, 34, 11$

$$14۔ \text{لا}^5 - 24\text{لا}^4 + 11\text{لا}^3 + 20385 = 0$$



کی دو حقیقی اصلیں ہیں۔ ان کو معلوم کرو۔

جواب :- ۲۱۵۴۳ - ۶۷۳۵۵۹۲

سٹرجی - ایچ - ڈارون نے اس مساوات کو مقالہ

On the precession of a viscous spheroid, and on the Remote History of the Earth

میں درج کیا ہے۔ دیکھو Phil. Trans. حصہ دوم باب ۹ صفحہ ۵۰۸۔  
یہ اصلیں "زمین کی گردش کے جذر الکعب کی وہ دو قیمتیں ہیں جنکے لئے زمین  
اور چاند ملکر ایک استوار جسم کی طرح حرکت کرتے ہیں۔"

۱۵۔ مساوات

$$۲۰\lambda^3 - ۲۴\lambda^2 + ۳ = ۰$$

کی سب اصلیں معلوم کرو۔

جواب :- ۱۶۰۶۸۶۵ - ۶۴۴۶۰۳۶ - ۶۳۱۴۶۹

یہ مساوات ایک مسئلہ کے حل میں واقع ہوتی ہے جو پروفیسر  
ٹاؤن سینڈ نے ایجوکیشنل ٹائمز باب ۶ میں ایک ایسے شہیر کے  
انصراف کو متعین کرنے کے لئے بیان کیا ہے جو یکساں طور پر لدا ہوا ہو  
اور جو اپنے دونوں سروں اور نقاط تثلیث پر تہا ہوا ہو۔ متذکرہ  
صدر حل پروفیسر بال نے حاصل کیا تھا۔

۱۶۔ مساوات

$$۱۴\lambda^3 + ۱۲\lambda^2 - ۹\lambda - ۱۰ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔

جواب :- ۶۸۵۹۰۶

یہ اور ذیل کی مثالوں کی مساواتیں ایسے سوالوں کی تحقیقات میں  
واقع ہوتی ہیں جو ٹیکنوں پر غمے ہوئے شہیروں سے متعلق ہوتے ہیں۔

۱۷۔ مساوات

$$۷\lambda^4 + ۲۰\lambda^3 + ۳\lambda^2 - ۱۶\lambda - ۸ = ۰$$

کی مثبت اصل معلوم کرو۔



جواب :- ۰۶۹۱۳۳۶

۱۸ - مساوات

$$لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + لا^۰ = ۲۰۷ - لا - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵$$

کی مثبت اصل اعشاریہ کے دس مقامات تک معلوم کرو۔

جواب :- ۰۶۹۳۸۶۰۵۸۰۳۳

(247) ۱۹ - ف (لا) = لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + لا^۰ = ۳۳۶ - لا - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵

کی سب متوافق اصلیں معلوم کرو اور مساوات کا مکمل حل حاصل کرو۔

جواب :- ف (لا) = (لا^۵ + لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + لا^۰) (لا - لا^۵)

۲۰ - اسی طرح مساوات

$$ف (لا) = لا^۵ - لا^۴ + لا^۳ - لا^۲ + لا - لا^۰ = ۸۴ - لا - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵$$

کو حل کرو۔

جواب :- (لا + لا^۱) (لا - لا^۱) (لا - لا^۳) (لا - لا^۵) (لا - لا^۸)

۲۱ - وہ شرط معلوم کرو کہ دفعہ ۹۹ مثال ۳ میں اسٹرم کا جو دو درجی

باقی ہے اس کی اصلیں خیالی ہوں۔

جواب :- ۵۷ + ۱۳ جے مثبت۔

یہ شرط اس وقت پوری ہوتی ہے جبکہ ۵۷ اور جے دونوں مثبت ہوں (کیونکہ اس صورت میں دفعہ ۳۷ کی متماثلہ کی رو سے ۷ کو مثبت ہونا چاہئے) اس لئے آسانی کے ساتھ یہ نتیجہ نکالا جاسکتا ہے کہ متذکرہ صدر چار درجی حقیقی اصلیں نہیں رکھتا جبکہ ۵۷ اور جے مثبت ہوں (دیکھو

مثال ۱۵ صفحہ ۳۲۳)

۲۲ - جب اس چار درجی کی دو اصلیں ۷ کے مساوی ہوں تو

ثابت کرو کہ

$$- گ - ع$$

$$۱۷ + ب = ۵۲ - ع - ۱۳ جے$$

۲۳ - اگر مساوات ف (لا) = ۰ کی سب اصلیں حقیقی ہوں تو



ثابت کرو کہ مساوات  $f(لا) - [ف(لا)] = ۰$  کی سب اصلیں خیالی ہیں۔

۲۴۔ اگر کسی درجہ کی مساوات میں جو لا کی قوتوں کی بموجب ترتیب دی گئی ہو تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

یہ تین رقمیں اس شکل  $ک + لا + ک + ع + لا + ک + ع + لا$  کی ہونی چاہئیں۔ فرض کرو کہ مساوات کو لا۔ ع سے ضرب دیا گیا ہے۔ تب حاصل شدہ مساوات کی دو متصل رقمیں غائب ہو جائیں گی اور اسلئے اس کی کم از کم دو خیالی اصلیں ہونی چاہئیں لیکن اس مساوات کی اصلیں سوائے ع کے دی ہوئی مساوات کی اصلیں ہیں۔

۲۵۔ اگر کسی مساوات کے چار متصل سر سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اسکی اصلیں سب کی سب حقیقی نہیں ہو سکتیں۔

اس کو گذشتہ مثال میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔ ان چار رقموں کو انکی خاص شکل میں لکھ کر لا۔ اسے ضرب دینے سے یہ آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے کہ حاصل شدنی مساوات کی تین متصل رقمیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔

۲۶۔ پانچ درجہ کے لئے جس میں دوسری رقم غیر موجود ہو اسٹرم کے پہلے دو یاقیوں کو محسوب کرو۔

$$f(لا) = لا + لا + ب + لا + ج + لا + د$$

$$جواب :- ک = لا + لا + ب + لا + ج + لا + د$$

$$ک = لا + لا + ب + لا + ج$$

$$جہاں ۱ = لا + لا + ج + لا + ب + لا + د = ۵۰ د = ۸ ب = ۶۰ ج = ۵$$

$$ج = ۳ لا + ج = ۵ ب = ۵$$

اوپر کی ترقیم کو باقی رکھیں تو تیسرے باقی  $ک = لا + ع$  کے سروں



۲۷۔ شنائی مسروں کے ساتھ لکھے ہوئے عام پانچ درجی سے  
دوسری رقم خارج کرو اور ثابت کرو کہ استحالہ شدہ مساوات کے لئے جو اسٹرم  
کے پہلے دو باقی حاصل ہوتے ہیں ان کے صدر سر ہیں

۲۸ — ن ویں درجہ کی مساوات جسمیں دوسری رقم غیر موجود ہو یعنی

$$1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n = \dots$$

کے لئے جو اسٹرم کے پہلے دو باقی حاصل ہوں ان کے لئے سر معلوم کرو۔  
ان سروں کے علاوہ جو اوپر درج ہیں کوئی اور سر مطلوبہ قیمتوں میں  
شریک نہیں ہونگے۔ ہم آسانی کے ساتھ حاصل کرتے ہیں

۱۶  
۵-۲-۱ لا ۵-۲-۳ ب لا ۵-۳-۴ ج لا ۵-۴-۵ ...

$$S_n = \{n(n-1) - n + 1 + n + 1 + \dots + 1\}$$

۲۹۔ شنائی سروں کے ساتھ لکھی ہوئی ن ویں درجہ کی مساوات سے  
دوسری رقم خارج کرو اور ثابیت کرو کہ احتمالہ مساوات کے لئے جو اسٹرم کے  
پہلے دو باقی حاصل ہوتے ہیں ان کے صدر سر ہیں

۵۔ ن ۵ ع + ۳ (ن - ۲) ۱ جے،

ان جملوں کو آسانی کے ساتھ پہلی مثال سے دفعہ ۳۵ کے استحالہ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔ لہٰذا لہٰذا کی قیمتیں مساواتوں

پُل = ۵، پُل = ۶، گ = ۷، پُل = ۸، پُل = ۹



سے حاصل ہونگی جہاں گ کی بجائے اسکی قیمت دفعہ ۳۷ کی مماثلہ سے رکھی گئی ہے اور مثبت مضروب فیہ خارج کر دئے گئے ہیں۔  
۳۰۔ یولر کے کعبی کے لئے اسٹرم کے تفاعل محسوب کرو (دفعہ ۶۱ دیکھو)  
چند تحویلات کے بعد اور مثبت اجزاء کے ضربی کو خارج کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$f(1) = 1 + 3h + \frac{1}{12}(12 - 1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$f(2) = 1 + 2h + \frac{1}{12}(12 - 4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$k = 12 + 2h - 12 = 2h$$

$$k = 12 - 2h$$

چار درجہ کی اصلوں کی نوعیت کے متعلق جو شرطیں دفعہ ۶۸ میں حاصل ہوئی ہیں سب کو ان نتیجوں سے مثال ۴ صفحہ ۸۳ کی مدد سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔  
اور یہ دیکھ لیا جاسکتا ہے کہ اصلوں کے حقیقی ہونے کے لئے جو شرطیں دفعہ ۱۰۰ اور تذکرہ صدر دفعہ میں حاصل ہوئی تھیں دونوں یہاں باہم حاصل ہوتی ہیں۔  
کیونکہ یولر کے کعبی کی سب اصلوں کے حقیقی اور مثبت ہونے کے لئے لا کی بجائے صفر درجہ کرنے سے علامت کی تین تبدیلیاں ملنی چاہئیں اور اسکے لئے اس بات کی ضرورت ہے کہ  $12 - 2h$  اور  $2h - 12$  دونوں منفی ہوں۔



(242)

# بارہوان با

## ملقف اعداد اور ملقف متغیر

۱۱۴۔ ملقف اعداد۔ تریسیمی تعبیر۔ ابواب گذشتہ میں اکثر ایسی مثالوں سے واسطہ رہا ہے جنہیں عددی مساواتوں کے حل میں  $1 + B = A$  کے شکل کی مقداریں واقع ہوئی ہیں جو منفی عدد کا جذر المربع نکالنے پر مشتمل ہیں۔ ایسے جملہ کو جسمیں ۱ مثبت یا منفی حقیقی اکائیاں اور ب مثبت یا منفی خیالی اکائیاں شامل ہوں ملقف عدد کہا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۵)۔ خیالی اکائی  $A = 1 + B$  کو اختصاراً  $X$  سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ حقیقی اور خالص خیالی اعداد دونوں جملہ  $1 + X$  میں شامل ہیں کیونکہ قبل الذکر اعداد یعنی حقیقی اعداد  $B = 0$  رکھنے اور ثنائی الذکر  $A = 1$  رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ ملقف اعداد پر تمام معمولی حسابی اعمال جاری ہو سکتے ہیں اور کسی ایسے حسابی عمل کے نتیجہ میں  $X$  کی ایک سے بڑی صحیح قوتوں کو ربط  $X^n = 1$  کی مدد سے مختصر کیا جاسکتا ہے۔

اب ہم ملقف اعداد کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کرتے ہیں جو ان تفاعلوں کے سمجھنے میں بہت سہولت پیدا کر دیگا جنہیں اس قسم کی مقداریں شامل ہوتی ہیں۔

جملہ  $1 + X$  کو شکل

مہ (جم عہ + خ جب عہ)



$$م = \sqrt{ب^2 + ۱} \text{ ' } ب \text{ ' } \text{جمعه} = \frac{۱}{م} \text{ ' } جب \text{ ' } ع = \frac{ب}{م}$$

(250)

ہیں۔ مبداء سے اس نقطہ کا فاصلہ و ملتفت عدد کے مقیاس کے  
مساوی ہے اور زاویہ کلا و اس کی سعت کے مساوی۔  
ملتفت عدد کی مقدار کا اندازہ اس کے مقیاس کی مقدار سے  
کیا جاتا ہے۔ جب ملتفت عدد معدوم ہوتا ہے (یعنی جب ۱ اور  
ب جدا گانہ صفر ہوتے ہیں) تو اس کا مقیاس بھی معدوم ہو جاتا ہے اور  
اس کے برعکس جب مقیاس معدوم ہوتا ہے تو چونکہ  $۱ + ب = ۰$ ،  
۱ اور ب کو جدا جدا صفر ہونا چاہئے اس لئے خود ملتفت عدد بھی  
معدوم ہو جاتا ہے۔ ایسے دو عدد ۱ + خ ب اور ۱ + خ ب مساوی



ہونگے جبکہ  $1 = 1$  اور  $ب = ب$  یعنی جبکہ ان کے مقیاس باہم مساوی ہوں اور جبکہ سعت یا تو باہم مساوی ہوں یا  $۲۲$  کے ضعف کا فرق رکھیں۔

اختصار کی خاطر آئندہ  $1 + خ$  ب کے مقیاس اور سعت کو تریم مق  $(1 + خ ب)$  سعت  $(1 + خ ب)$  سے تعبیر کیا جائیگا۔

۱۱۵۔ ملفت اعداد۔ جمع اور تفریق۔ فرض کرو کہ دوسرا

ملفت عدد  $1 + خ$  ب خط مستقیم و  $1$  سے تعبیر ہوتا ہے اور اسلئے  
 $1 = 1$  مق  $(1 + خ ب)$  لا و  $1 =$  سعت  $(1 + خ ب)$   
 اب ہم حاصل جمع

$$1 + خ ب + 1 + خ ب$$

کو تعبیر کر نیا طریقہ متعین کرتے ہیں۔

(251) اس مجموعہ کو شکل  $1 + 1 + خ (ب + ب)$  میں لکھنے سے  
 دفعہ ۱۱۴ کی تریم کی بموجب ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ایک ایسے خط مستقیم  
 سے تعبیر ہوگا جو  $1$  سے اس نقطہ تک کھینچا گیا ہو جس کے محدود  
 $1 + 1$  ب + ب ہیں۔ اس نقطہ کو معلوم کرنے کے لئے  $1$  ب کو  
 و  $1$  کے متوازی اور مساوی کھینچو تو چونکہ  $1$  ب،  $1$  ب علی الترتیب  
 $1$  ب کے مساوی ہیں  $1$  ب مطلوبہ نقطہ ہے اور

$$وب = 1 + 1 + خ (ب + ب)$$

$$لاوب = سعت 1 + 1 + خ (ب + ب)$$

اسلئے دو ملفت عددوں کو جمع کرنے کے لئے ہم و  $1$  کھینچتے ہیں  
 جو انہیں سے ایک کو تعبیر کرتا ہے اور اس کے سرے پر  $1$  ب کھینچتے  
 ہیں جو دوسرے کو تعبیر کرتا ہے (یعنی اس طور پر کہ اسکا طول دوسرے  
 عدد کے مقیاس کے مساوی ہو اور و  $1$  کے ساتھ یہ خط جو زاویہ بنائے



وہ اس کی سمت کے مساوی ہو)۔ تب وہ ان دو ملتف  
عددوں کے مجموعہ کو تعبیر کریگا۔  
اب چونکہ وہ  $1 + 1$  اب سے بڑا نہیں ہے یہ نتیجہ  
نکلتا ہے کہ دو ملتف عددوں کے مجموعہ کا مقیاس ان کے  
مقیاسوں کے مجموعہ سے کم (یا زیادہ سے زیادہ اس کے مساوی)  
ہوتا ہے۔

اس طریقہ تعبیر کو اس قسم کی مقداروں کی کسی تعداد کا مجموعہ  
معلوم کرنے میں تو وسیع دیکھا جاسکتا ہے۔ مثلاً تیسرے ملتف عدد  
 $1 + 1$  کو جمع کرنے کے لئے جو  $1$  سے تعبیر ہوتا ہے ہم  $1 + 1$   
و  $1$  کے متوازی اور مساوی کھینچتے ہیں اور وج کو ملائے ہیں۔ تب  
وج تین ملتف اعداد  $1$ ،  $1$ ،  $1$  کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔  
یہ بھی ظاہر ہے کہ ہم عام طور پر یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ ملتف مقداروں  
کی کسی تعداد کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ  
سے کم (یا زیادہ سے زیادہ مساوی) ہوتا ہے۔

تفریق کو بھی اسی طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ وہ  $1$  سے  
و  $1$  اور  $1$  کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے  $1$  سے وہ اور  $1$  کا فرق  
تعبیر ہوگا۔ اس لئے دو ملتف عددوں کو تفریق کرنا ہو تو پہلے عدد کو تعبیر  
کرنیوالے خط کے سرے پر ہم ایک خط کھینچتے ہیں جو دوسرے عدد کو تعبیر  
کرنیوالے خط کے متوازی اور مساوی ہے مگر مخالف سمت میں دینے  
ایسی سمت میں جو  $1$  کے ساتھ دوسرے کی سمت سے بقدر  $1$  کے  
زیادہ بڑا زاویہ بناتی ہے)۔ اس خط کے سرے کو ہم  $1$  سے ملائے ہیں  
تاکہ دئے ہوئے دو ملتف عددوں کے فرق کو تعبیر کرنیوالا خط ملجائے۔



۱۱۶ - ضرب اور تقسیم - دو ملف عدد ۱ + خ ب ۱ + خ ب

کو ضرب دینے کے لئے ان کو ہم اس شکل میں لکھتے ہیں

(252)

تو ڈیمو اسٹر کے مسئلہ کی رو سے

$$(1 + خ ب) (1 + خ ب) = مہ \{ جم (عہ + عہ) + خ جب (عہ + عہ) \}$$

جس سے ثابت ہے کہ دو ملف عددوں کا حاصل ضرب ایک

ملف عدد ہے جسکا مقیاس دونوں مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے

اور جسکی سعت دونوں سعتوں کا مجموعہ -

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ اس قسم کے اجزائے ضربی کی کسی تعداد کا حاصل ضرب ایک ملف مقدار ہے جسکا مقیاس تمام مقیاسوں کا حاصل ضرب ہے اور جسکی سعت تمام سعتوں کا مجموعہ -

$$1 + خ ب کو 1 + خ ب سے تقسیم کر نیکے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ$$

$$\frac{1 + خ ب}{1 + خ ب} = مہ \{ جم (عہ - عہ) + خ جب (عہ - عہ) \}$$

جس سے ثابت ہے کہ دو ملف عددوں کا خارج قسمت

ایک ملف عدد ہے جسکا مقیاس دونوں مقیاسوں کے

خارج قسمت کے مساوی ہے اور جسکی سعت دونوں سعتوں کے

فرق کے مساوی -

دفعہ ۱۶ کے مسئلہ کے ثبوت میں یہ مان لیا گیا ہے کہ جب اجزائے ضربی (خیالی یا حقیقی) کی کسی تعداد کا حاصل ضرب معدوم ہوتا ہے تو



ان میں سے ایک جزو ضربی کو معدوم ہونا چاہئے۔ جب تمام اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو یہ مسئلہ بالکل واضح ہے اور اوپر جو کچھ ثابت ہوا اس سے اس وقت بھی جبکہ اجزائے ضربی ملتف ہوں یہی نتیجہ برقرار رہتا ہے کیونکہ حاصل ضرب کا مقياس اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جب ان میں سے کوئی جزو ضربی معدوم ہو اور اس لئے وہ ملتف مقدار معدوم ہونی چاہئے جس کا یہ جزو ضربی مقياس ہے۔

۱۱۷۔ ملتف عددوں پر دوسرے اعمال۔ پچھلے مسئلوں سے

یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف عدد کی کوئی صحیح قوت شکل  $1 + x$  میں بیان کی جا سکتی ہے جہاں  $1$  اور  $x$  حقیقی ہیں۔ اور زیادہ عام صورت میں اگر کسی منطق صحیح تفاعل

$$1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots + 1^n + 1^{n+1}$$

میں جس کے سر ملتف (بشمول حقیقی) اعداد ہیں  $1^0$  کی بجائے ملتف مقدار  $1 + x$  درج کی جائے تو نتیجہ کو معیاری شکل  $1 + x$  میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

(258)

اس باب میں ملتف عددوں کے ایسے تفاعلوں پر بحث کرنا مقصود نہیں ہے جو منطق صحیح تفاعلوں کی اس نوع میں داخل نہیں ہیں جس سے ہمیں ابتک واسطہ رہا ہے۔ لیکن ڈیویا پر کے مسئلہ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ علم الحساب کے بقیہ اعمال سے ہر صورت میں مثلاً کسری یا ملتف قوت نما پر اٹھانے، نوکار تم لینے اور ان قوتوں پر اٹھانے سے جن کی اساس اور قوت نما دونوں ملتف ہوں ایک ملتف عدد ہی حاصل ہوتا ہے۔ اس کو یوں بیان کیا جاتا ہے کہ ملتف عدد ایک ایسا نظام یا کردہ بناتے ہیں جو خود مکمل ہے۔

۱۱۸۔ ملتف متغیر۔ اس کتاب کے ابتدائی ابواب میں کثیر الارقام کے

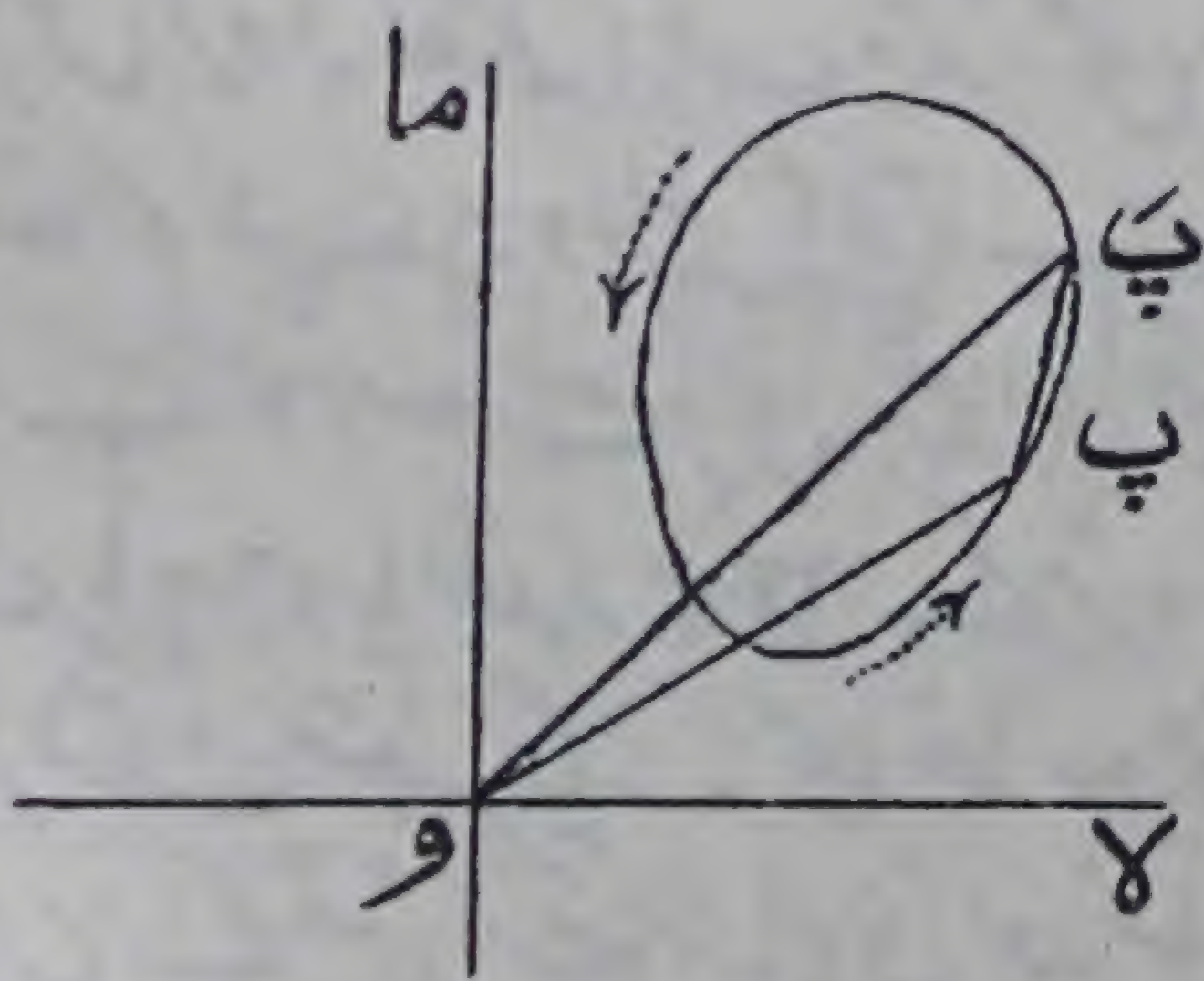


تغیر کا مطالعہ متغیر کی  $-\infty$  سے  $+\infty$  تک حقیقی قیمتوں میں سے گزرنے کے جواب میں کیا گیا تھا اور کثیر الارقام کی شکل کو ایک منحنی کے ذریعہ تعبیر کرنے کا طریقہ واضح کیا گیا تھا۔ یہ فی الحقیقت اُس عام کثیر الارقام کی ایک خاص صورت ہے جس پر اب بحث کی جائیگی۔

فرض کرو کہ  $y$  میں ایک منطق اور صحیح تفاعل دیا گیا ہے جس کے سر حقیقی یا ملف عدد ہیں یعنی

$$f(y) = 1 \cdot y^0 + 1 \cdot y^1 + 1 \cdot y^2 + \dots + 1 \cdot y^{n-1} + 1 \cdot y^n$$

ہم اس کے تغیرات کا مطالعہ  $y$  کی مختلف قیمتوں کے جواب میں کر سکتے ہیں جہاں  $y$  ملف شکل  $la + x$  میں ہے اور جہاں  $la$  اور  $ma$  دونوں تمام ممکن حقیقی قیمتیں اختیار کرتے ہیں۔ اس شکل  $la + x$  یا  $ma$  ملف متغیر کہیں گے۔ ظاہر ہے کہ اس متغیر کی تمام ممکن حقیقی قیمتیں  $la + x$  کی قیمتوں میں شامل ہیں کیونکہ یہ وہ قیمتیں ہیں جو  $la$  کو بدلنے اور  $ma$  رکھنے سے پیدا ہوتی ہیں۔ دفعہ ۱۱۴ کے اصولوں کی بموجب ہم ملف متغیر  $la + x$  کو خط  $op$  (شکل ۸) سے تعبیر کر سکتے ہیں جو ایک ثابت نقطے  $o$  سے اُس نقطہ تک کھینچا گیا ہے جس کے محدود  $la$  میں ہے۔ یا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ  $la + x$  نقطہ  $p$  سے تعبیر ہوتا ہے



اس طور پر  $la + x$  کی تمام ممکن قیمتیں مستوی میں کے تمام نقطوں سے تعبیر ہونگی۔ اب چونکہ  $y$  کی کسی مخصوص قیمت کے لئے  $f(y)$



شکل ۱ + خ ب (دفعہ ۱۱) اختیار کرتا ہے اس لئے ف (ی) کی قیمتوں کو اسی طرح ایک دوسرے مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ اس دفعہ میں ہم صرف خود متغیر لا + خ ما کی تعبیر کی طرف اپنی توجہ محدود رکھتے ہیں ہم لا + خ ما کے تغیر کو مسلسل طور پر واقع ہوتا ہوا تصور کرینگے۔ مثلاً نقطہ لا، ما ایک منحنی پر حرکت کرتا ہے۔ اگر و پ اور و پ سے متغیر کی دو متصل قیمتیں تعبیر ہوں تو ہم متناظر قیمتوں لا + خ ما، لا + خ ما کو طریقہ ذیل پر لکھتے ہیں:-

$$ما \equiv لا + خ ما \equiv ر (جم طه + خ جب طه)$$

اب چونکہ و پ سے و پ اور پ پ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے (دفعہ ۱۱۵) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ پ، ی کے اضافہ کو تعبیر کرتا ہے اور اگر ی = ی + ط تو ط کو شکل ذیل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$ط \equiv غه (جم فہ + خ جب فہ)$$

جہاں غه = پ پ اور فہ وہ زاویہ ہے جو پ پ، و لا کے ساتھ بتاتا ہے۔

ی کے مقیاس کا تغیر و پ - و پ ہے یا ر - ر اور اسکی سمت کا تغیر پ و پ ہے یا طه - طه خود ی کا تغیر جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا ط سے یا غه (جم فہ + خ جب فہ) -

فرض کرو کہ نقطہ ایک بند منحنی مرسم کرتا ہے۔ جب وہ اپنے ابتدائی مقام پ پر واپس پہنچتا ہے تو مقیاس پھر اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرتا ہے اور سمت اپنی ابتدائی قیمت اختیار کرتی ہے اگر نقطہ و منحنی کے باہر ہو یا بقدر ۲۲ کے برہ جاتی ہے اگر و منحنی کے اندر ہو۔ اگر ملطف متغیر ایک ہی خط دو مخالف سمتوں میں مرسم کرے تو اسکی سمتوں کے تغیرات مساوی اور مختلف علامت ہوتے ہیں یعنی کل تغیر صفر کے مساوی ہوتا ہے۔ اس سے ہم ملطف متغیر کی سمت کے



(255)

تغیر کی ایک خاصیت اخذ کر سکتے ہیں جو آئندہ مشاہدات میں اہم ثابت ہوگی۔  
فرض کرو کہ ایک مستوی رقبہ خطوط ب د، ا ف، ع ج وغیرہ  
سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے (شکل ۹) تو پورے رقبہ کے محیط  
کے لحاظ سے سعت کا تغیر جزوی رقبوں کے محیطوں کے لحاظ

سے اس کے تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جہاں یہ فرض  
کر لیا گیا ہے کہ تمام رقبے متغیر کے ایک ہی سمت میں حرکت کرنے سے  
مرشتم ہوئے ہیں۔ یہ نتیجہ بدیہی ہے کیونکہ جب نقطہ تمام رقبوں کو ایک ہی  
جہت میں مرشتم کرتا ہے تو تقسیم کرنیوالے اندرونی خطوں میں سے ہر ایک  
دو بار مرشتم ہوتا ہے مگر مخالف سمتوں میں اور بیرونی محیط صرف ایک مرتبہ  
مرشتم ہوتا ہے پس سعت کا مجموعی تغیر تقسیم کرنیوالے خطوں کے لحاظ سے  
صفر کے مساوی ہے اور بیرونی محیط کے لحاظ سے اسکا جو تغیر ہے

صرف وہی باقی

رہتا ہے۔ مثال

کے طور پر شکل میں

رقبوں ا ب ف

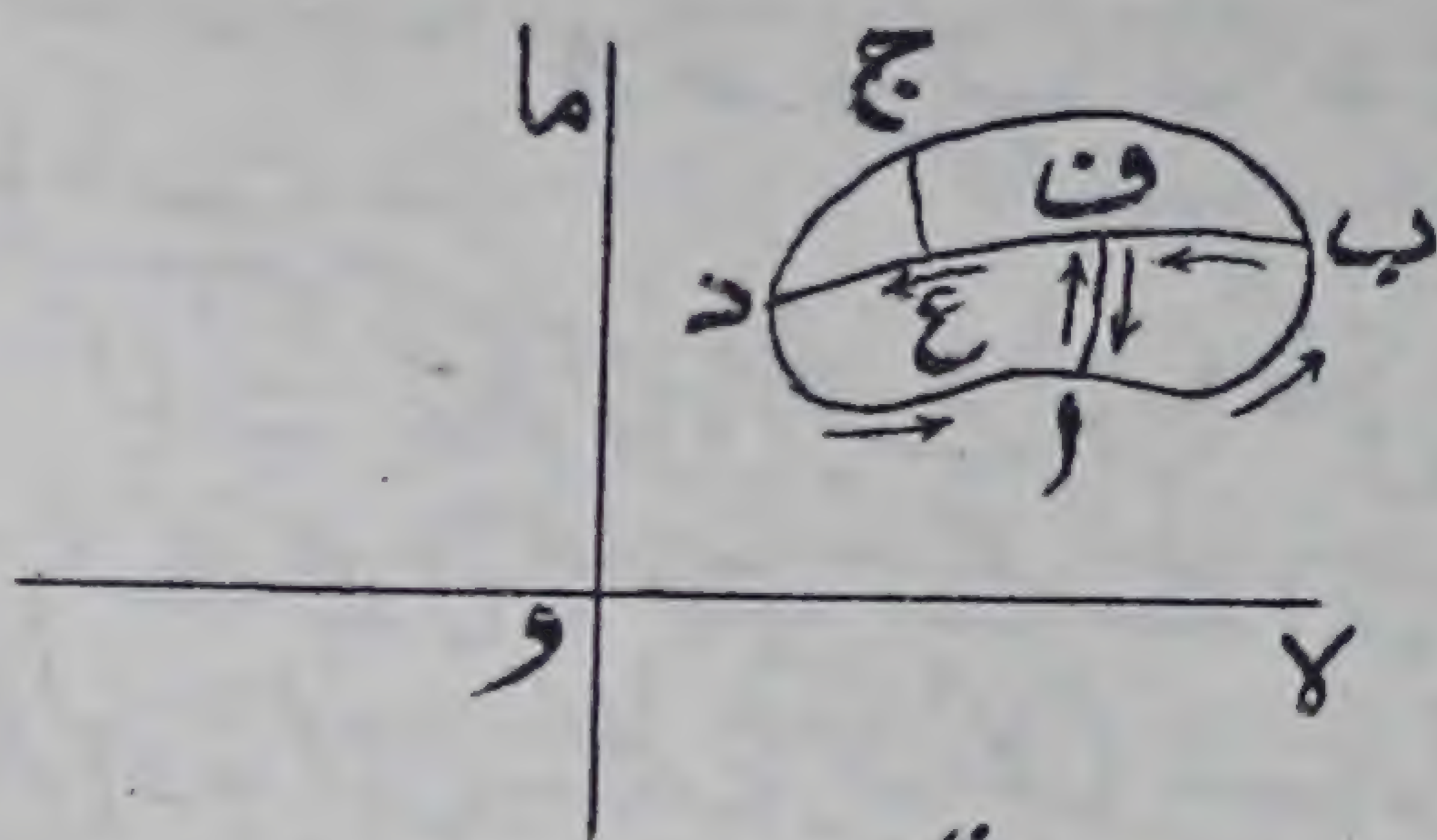
ا ف د پر غور

کرو۔ جب نقطہ

ان رقبوں کو تیروں

سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرشتم کرتا ہے تو ا ف کے لحاظ سے مجموعی

تغیر صفر ہے۔



شکل (۹)

سے ظاہر کی ہوئی سمت میں مرشتم کرتا ہے تو ا ف کے لحاظ سے مجموعی  
تغیر صفر ہے۔

۱۱۹۔ ملطف متغیر کے تفاعل کا تسلسل۔ فرض کرو کہ ملطف

متغیری ایک ثابت قیمت ی سے شروع کر کے ایک مجموعاً اضافی  
۵ = غ (جہم نہ + خ جب نہ) حاصل کرتا ہے۔ تب اگر ف (دی) دیا



تفاعل ہو تو دفعہ ۶ کے پھیلاؤ میں لا کی بجائے ی رکھنے سے

$$ف(ی) = ف(ی + ۵) = ف(ی) + ف(ی) + ۵ + \frac{ف(ی)}{۲ \times ۱} + ۵ + \dots$$

اور ف(ی) میں اضافہ جو ف(ی + ۵) - ف(ی) کے مساوی ہے

$$ف(ی) + ۵ + \frac{ف(ی)}{۲ \times ۱} + \frac{ف(ی)}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots$$

ہوگا۔

اس جملہ میں ۵ کی قوتوں کے سرسب کے سب معمولی شکل کے ملتی جملے ہیں اور اگر ان کے مقیاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ وغیرہ ہوں تو متواتر رقموں کے مقیاس ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ کی رو سے مجموعہ کا مقیاس، مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف(ی) کے اضافہ کا مقیاس

$$۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، \dots$$

سے کم ہے۔

اب غہ کو ایسی قیمت دیا سکتی ہے (دفعہ ۵) جس کے لئے یا اس سے چھوٹی قیمت کے لئے اس جملہ کی قیمت کسی مقررہ مقدار سے کم ہو۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتی متغیر کے لا انتہا چھوٹے تغیر کے جواب میں (یعنی اس تغیر کے جواب میں جس کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو) تفاعل میں بھی لا انتہا چھوٹا تغیر واقع ہوتا ہے۔ یہ الفاظ دیکھ

(256)

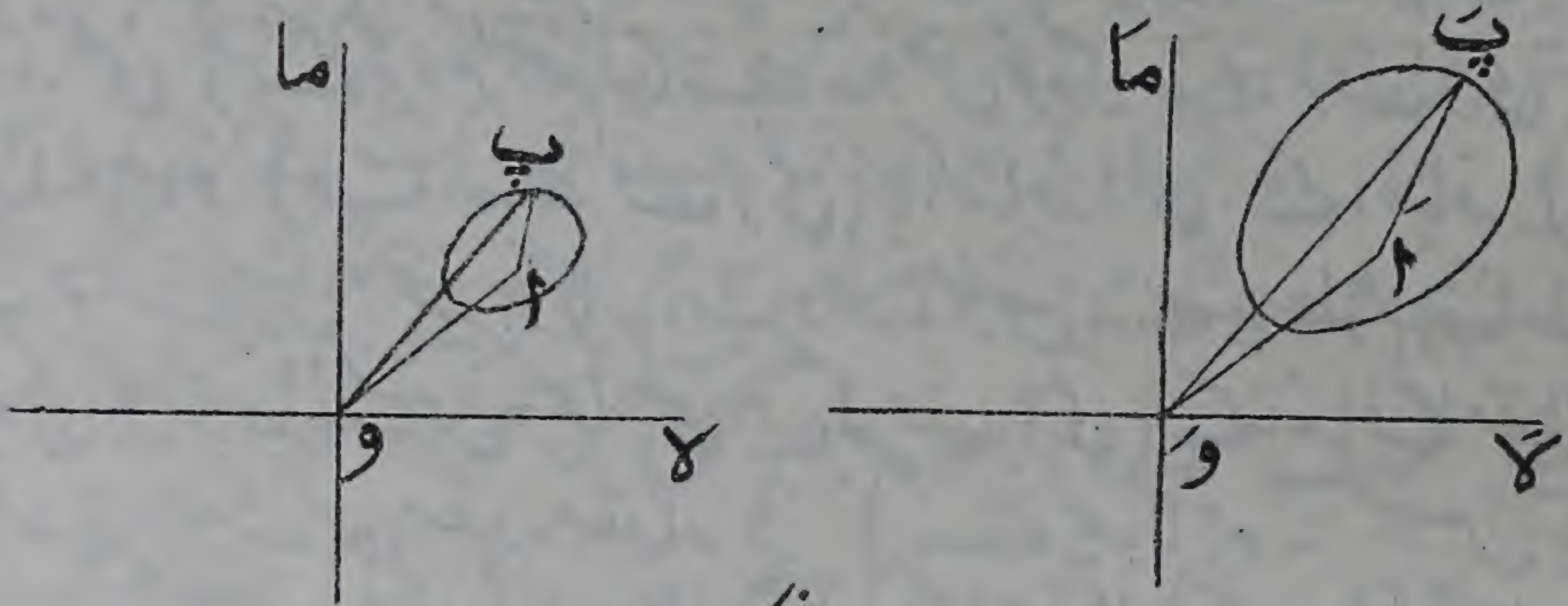
تفاعل ملتی متغیر کے تغیر کے ساتھ ساتھ مسلسل بدلتا ہے۔

۱۲۰۔ ف(ی) کی سمت کا تغیر جب ملتی متغیر ایک

چھوٹا بند متغیر مرشحہ کرے۔ ی کی قیمتوں کے ایک مسلسل سلسلہ کے



جواب میں ف (ی) کی قیمتوں کا ایک مسلسل سلسلہ ملتا ہے جنکو خود  
ی کی قیمتوں کی طرح، ایک مستوی میں کے نقطوں سے تعبیر کیا جاسکتا  
ہے۔ نقطوں کے ان سلسلوں کو ہم ایک دوسرے سے قریب دو  
شکلوں سے تعبیر کرتے ہیں (شکل ۱۰) جنکے متعلق یہ فرض کر لیا جاسکتا ہے



شکل (۱۰)

و مختلف مستویوں پر کھینچے گئے ہیں تاکہ غلط فہمی واقع نہ ہو۔  
لا + خ کو تعبیر کرنے والے ہر نقطہ پ کے جواب میں ف (ی)  
کو تعبیر کریں والا ایک معین نقطہ پ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے  
جب 'پ' ایک مسلسل منحنی مرتسم کرتا ہے تو پ بھی ایک مسلسل  
منحنی مرتسم کرتا ہے اور جب 'پ' ایک بند منحنی کو مرتسم کرنے کے  
بعد اپنے ابتدائی مقام پر لوٹتا ہے تو پ بھی اپنے ابتدائی مقام پر  
واپس آتا ہے۔

فی الحال ہمارا مقصد ف (ی) کی سعت کے تغیر پر بحث کرنا  
ہے جبکہ پ ایک بند منحنی مرتسم کرے۔ فرض کرو کہ (ا) کوئی معین  
نقطہ ہے جس کے محدود لا + ما یعنی ی = لا + خ ما ہیں۔ ہم بحث  
کو دو صورتوں میں تقسیم کرتے ہیں:-

(۱) جبکہ لا + خ ما، ف (ی) = کی اصل نہ ہو یعنی جبکہ ف (ی)  
سے مختلف ہو۔



(۲) جبکہ لا + خ + ف (ی) = کی اصل ہو یا ف (ی) =۔  
 پہلی صورت میں نقطہ ۱ کے جواب میں ایک نقطہ ۱ ایسا موجود  
 ہوتا ہے جو ف (ی) کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے اور و (ا) صفر سے  
 مختلف ہوتا ہے۔ فرض کرو ی = ی + ہ + ہاں ہ = غ (جم فہ  
 + خ جب فہ) اور مان لو کہ پ جو ی کو تعبیر کرتا ہے ایک چھوٹا  
 بند منحنی ۱ کے گرد مرسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ پ (ی) کو تعبیر  
 کرتا ہے تو ایک سے ف (ی) کا اضافہ ی کے اضافہ ۱ پ  
 کے جواب میں تعبیر ہوگا۔ اب دفعہ ماسبق سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ  
 غ کو اتنی چھوٹی قیمتیں دیا جاسکتی ہیں کہ ف (ی) کے اضافہ کا مقیاس یعنی  
 ۱ پ ہمیشہ کسی مقررہ مقدار و (ا) سے چھوٹا ہو۔ پس یہ فرض  
 کر لیا جاسکتا ہے کہ پ ۱ کے گرد اتنا چھوٹا بند منحنی مرسم کرتا ہے  
 کہ اس کے متناظر پ سے مرسم شدہ بند منحنی و کے باہر ہو۔ اسلئے  
 دفعہ ۱۸ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پ سے اگر ایک چھوٹا بند منحنی  
 مرسم ہو جس میں کوئی ایسا نقطہ شامل نہیں ہے جو ف (ی) = کو  
 پورا کرتا ہے تو ف (ی) کی سعت کا کل تغیر کچھ نہیں ہوتا۔  
 (۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ لا + خ + ف (ی) =  
 کی ایک اصل ہے جو م مرتبہ تکرار پاتی ہے اور فرض کرو کہ  
 ف (ی) = (ی - ی) (ی) (ی) (ی)

تب

ف (ی) = ہا (ی) = غ (جم م فہ + خ جب م فہ) (ی)  
 اس صورت میں و (ا) =۔ اور جب پ ۱ کے گرد ایک  
 بند منحنی مرسم کرتا ہے تو پ اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہوتا ہے اور  
 ف (ی) کی سعت بقدر ۲۲ کے ضعف کے بڑھ جاتی ہے جسکو طریقہ



ذیل پر متعین کیا جاسکتا ہے :- مساوات بالا سے

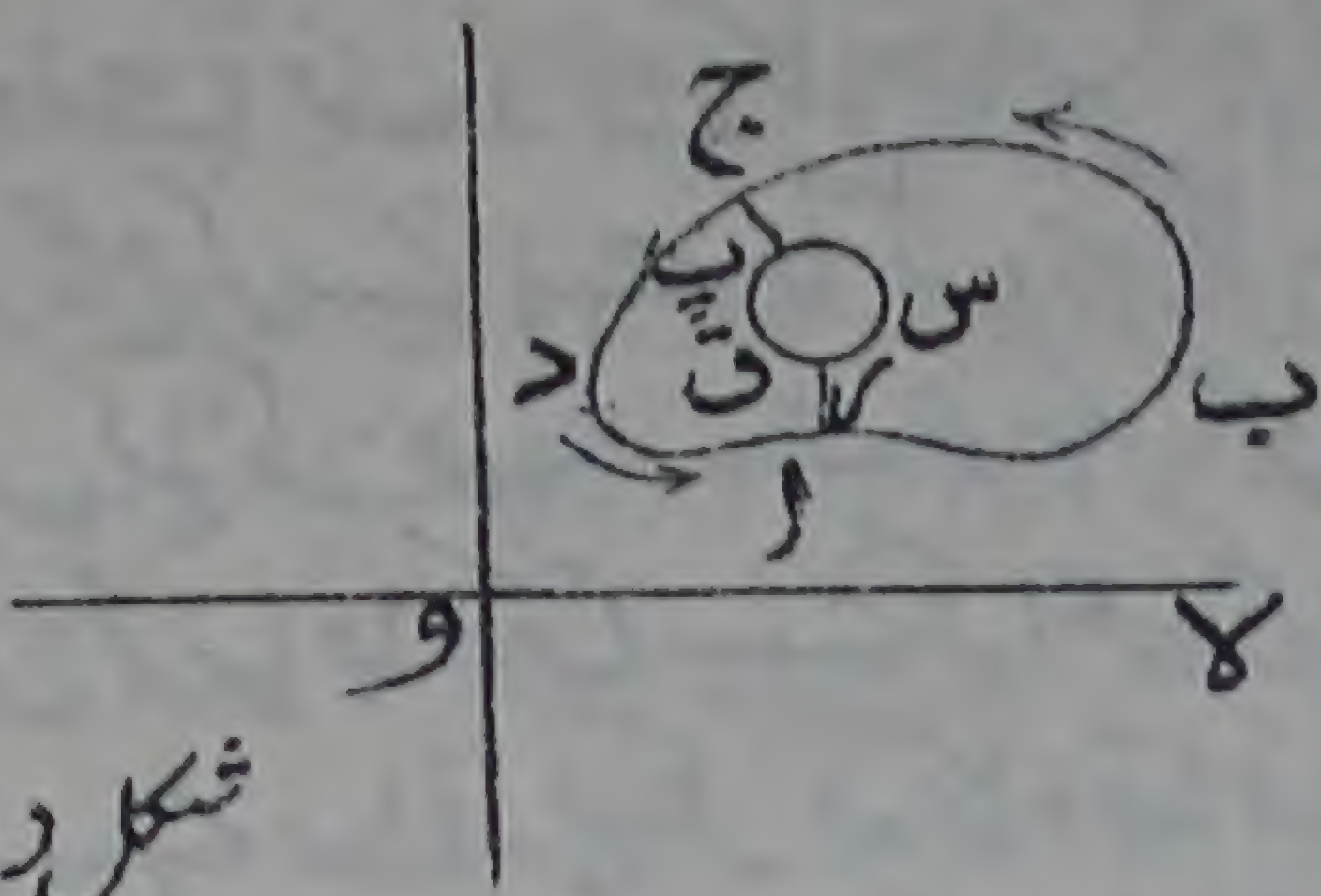
سعت ف (ی) = م ف + سعت پ (ی)

(258) اور سعت ف (ی) کا اضافہ، م ف کے اضافہ میں سعت پ (ی) کا اضافہ جمع کرنے سے حاصل ہوگا۔ اب یہ دوسرا اضافہ (۱) کی رو سے کچھ نہیں کیونکہ پ سے جو بند منحنی مرتسم ہوتا ہے اس کے متعلق یہ فرض کر لیا جاسکتا ہے کہ اس میں پ (ی) = کی کوئی اصل شامل نہیں ہے۔ اور چونکہ ف کا اضافہ، پ کی ایک گردش میں ۲۲ ہوتا ہے اس لئے م ف کا اضافہ ۲ م ۲۲ ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب، پ ایک بند منحنی مرتسم کرتا ہے جس میں مساوات ف (ی) = کی ایک اہل م رتبہ والی شامل ہے تو ف (ی) کی سعت میں بقدر ۲ م ۲۲ کے اضافہ ہوتا ہے۔

۱۲۱۔ کوشی کا مسئلہ۔ جب، ی، ایک مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے تو اس کے جواب میں ف (ی) اپنے مستوی میں ایک خط دو مخالف سمتوں میں مرتسم کرتا ہے اور سعت ف (ی) میں مساوی اور مخالف تغیرات واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی مستوی رقبہ کو دفعہ ۱۱۸ کی طرح حصوں میں تقسیم کیا جائے تو سعت ف (ی) کا تغیر جو اسی جہت میں ی سے مرتسم شدہ تمام جزوی رقبوں کے جواب میں ہے سعت ف (ی) کے اس تغیر کے مساوی ہوگا جو ی سے مرتسم شدہ بیرونی محیط کے جواب میں ہے۔ اب فرض کرو کہ مستوی کا ہاکیں کوئی محیط مرتسم ہوا ہے اور پہلے یہ فرض کرو کہ اس میں ایسا کوئی نقطہ شامل نہیں ہے جو مساوات ف (ی) = کو پورا کرتا ہو۔ اس کو متعدد چھوٹے رقبوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کے لئے دفعہ ۱۲۰ کی



صورت (۱) کے نتائج قائم رہتے ہیں اور جو کچھ کہ ابھی ثابت کیا گیا، اُس سے یہ نتیجہ نکلتا



شکل (۱۱)

یہ کہ سعت ف (دی) کا تغیر جو ی سے مرسم شدہ بند محیط کے جواب میں ہے کچھ نہیں ہے۔ دوسرے یہ فرض کرو کہ

بند محیط میں ایسا نقطہ شامل ہے جو مساوات ف (دی) = کی اصل ہے اور یہ اصل م مرتبہ تکرار پاتی ہے۔ فرض کرو کہ اس نقطہ کے گرد ایک چھوٹا بند یعنی پ ق کا سرس کھینچا گیا ہے۔ اب ف (دی) کی سعت کا تغیر جو ی سے مرسم شدہ پورے محیط کے متناظر ہے اسکے ان تغیرات کے مجموعہ کے مساوی ہے جو رقبوں اب ج پ س کا ج د ا س ق پ پ ق کا س کی ترسیم کے متناظر ہیں۔ پہلے دو تغیرات جو کچھ کہ اوپر ثابت ہوا اُس کی وجہ سے معدوم ہو جاتے ہیں اور آخر کا تغیر، دفعہ ۱۲۰، (۲) کی رو سے  $\pi m$  کے مساوی ہے۔ پس ف (دی) کا مجموعی تغیر  $\pi m$  ہے۔ اسی طرح اگر رقبہ میں ایسے اور نقطے بھی شامل ہوں جو م، م، وغیرہ مرتبہ تکرار پانیوالی اصولوں کے جواب میں ہیں تو مجموعی تغیر  $\pi (m + m + m + \dots) = \pi$ ۔ پس ہم مسئلہ ذیل پر پہنچتے ہیں جو کوششی سے منسوب کیا جاتا ہے :-

(25)

ایک دے ہوئے رقبہ کے اندر کسی کثیرالارقام کی اصلوں کی تعداد، اس کثیرالارقام کی سعت کے مجموعی تغیر کو جو ملفت متغیر سے اُس رقبہ کے محیط کی مکمل ترسیم کے جواب میں ہے  $\pi$  سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔



۱۲۲۔ عام مساوات کی اصولوں کی تعداد۔ دفعات سابق کے ثابت شدہ اصولوں کی مدد سے ہم وہ مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں جس کا ذکر دفعات ۱۵ اور ۱۶ میں کیا گیا تھا یعنی ہر  $n$  ویں درجہ کی منطق اور مکملہ مساوات کی  $n$  خیالی یا حقیقی اصلیں ہوتی ہیں۔  
فرض کرو کہ  $y$  کا منطق اور مکملہ تفاعل

ف (د) =  $y^1 + y^2 + \dots + y^n$   
ہے۔ اب سو اس مفروضہ کے کہ ف (د) 'متغیر کی کسی لامتناہی قیمتوں کے لئے معدوم نہیں ہو سکتا' ف (د) =  $y^1 + y^2 + \dots + y^n$  کی اصولوں کے وجود کے متعلق کوئی اور مفروضہ اختیار کئے بغیر ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ  $y$  اپنے مستوی میں اتنا بڑا دائرہ مرسم کرتا ہے کہ اس کے باہر کوئی اصل وجود نہیں رکھتی۔ تب اگر

$$\text{ف (د) = } y^1 + y^2 + \dots + y^n$$

$$= y^n \text{ (د) 'جہاں } y^1 = \frac{1}{y^n}$$

تو  $y$  جس کا مقیاس  $y$  کے مقیاس کا متکافی ہے ایک چھوٹا دائرہ مرسم کرے گا جس میں اس مستوی کا ایک ایسا حصہ شامل ہو گا جو  $y$  سے مرسم شدہ دائرہ کے باہر واقع ہو نیوالے ملف متغیر کے میدان کے جواب میں ہے اور اس لئے  
ف (د) =  $y^1 + y^2 + \dots + y^n$  کی کوئی اصل اس چھوٹے دائرہ کے اندر واقع نہیں ہو گی پس  $y$  سے پورے دائرہ کی ترسیم کے جواب میں ف (د) کی سعت کا تغیر =  $y^1$  اور اس لئے

$$\text{ف (د) کی سعت کا تغیر} = y^1 \text{ کی سعت کا تغیر}$$



اور اگر

ی = ر (جم طہ + خ جب طہ) یا ی = ر (جم ن طہ + خ جب ن طہ)

تو طہ بقدر ۲۲ کے بڑھ جاتا ہے اور اس لئے ی کی سعت بقدر ۲۲ کے بڑھ جاتی ہے۔

اب کوششی کے مسئلہ (دفعہ ۱۲۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ی سے مرتسم شدہ دائرہ کے اندر اصولوں کی تعداد یعنی مساوات ف (ی) = کی کل اصولوں کی تعداد ن ہے اور مسئلہ ثابت ہو چکا۔ (260)

اس طرح وہ مسئلہ جس کا ثبوت دفعہ ۱۵ میں ملوئی کر دیا گیا تھا کوششی کے مسئلہ کا نتیجہ صریح ہے۔ اس لئے کوششی کے مسئلہ کو مساواتوں کے نظریہ میں بنیادی مسئلہ قرار دیا جاسکتا ہے۔ تاہم یہ دیکھنا واجب ہے کہ دفعہ ۱۵ کے مسئلہ کو یعنی ہر عددی مساوات کی ایک عددی اصل ہوتی ہے بالراست کوششی کے مسئلہ کی مدد کے بغیر ان اصولوں کے ذریعہ ثابت کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۱۱۹ اور دفعات ماقبل میں مذکور ہیں۔ چنانچہ ہم اب اسکو اسی طرح ثابت کریں گے۔

۱۲۳۔ بنیادی مسئلہ کا دوسرا ثبوت۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ

ی کی کوئی قیمت ایسی نہیں ہے جو ف (ی) کو معدوم کرتی ہو۔ اور فرض کرو کہ قیمت ی جو نقطہ ۱ سے تعبیر ہوتی ہے (شکل ۱۰) مبدا و سے پ کے قریب ترین ممکن محل ۱ کے جواب میں ہے۔ اب ہم یہ ثابت کرنا چاہتے ہیں کہ اضافہ کو ایسی سمت دیا جاسکتی ہے کہ پ ایسے محل میں آجائے جو مبدا سے ۱ کی بہ نسبت قریب تر ہو۔ ہم حسب ذیل پھیلاؤ جانتے ہیں (دفعہ ۱۱۹) :-

$$ف (ی + ط) = ف (ی) + ف (ی) ط + \frac{ف (ی) ط^2}{2 \times 1} + \dots + ط^2$$







حرکت کی سمت کچھ ہی ہو یعنی خواہ سمت ظہر کچھ ہی ہو وقت  $> 0$  کیونکہ  $س$  سے  $ت$   $>$   $س$ ۔ پس ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ  $\Delta$  مبداء کے لحاظ سے  $\Delta$  کا قریب ترین ممکن محل نہیں ہے اور اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ صفر سے مختلف کوئی اور دوسری قیمت  $f$  (ی) کے مقیاس کی کم سے کم ممکن قیمت نہیں ہو سکتی۔

اس ثبوت میں جو اوپر دیا گیا ہے صرف یہ بتایا گیا ہے کہ مساوات کی اصل ہونی چاہئے لیکن اصلوں کی ٹھیک تعداد متعین نہیں کی گئی جیسا کہ اس ثبوت میں کی گئی ہے جسکا ماخذ کوشی کا مسئلہ ہے۔ تاہم جب یہ ثابت کر دیا گیا کہ کم از کم ایک اصل موجود ہونی چاہئے تو ثبوت کی تکمیل آسانی کے ساتھ دفعہ ۱۶ کے طریقہ سے ہو سکتی ہے۔

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ جب  $م$  کی کسی مخصوص قیمت کیلئے  $f$  (ی) معدوم نہیں ہوتا تو  $f$  (ی) کے اضافہ کو  $ھ$  کے ساتھ جو نسبت ہے اس کی انتہائی قیمت مستقل  $f$  (ی)  $\equiv$   $م$  (جمم) +  $خ$  جب  $م$  ہے۔ یہ آسانی کے ساتھ ماخوذ ہو سکتا ہے کہ ان دونوں اضافوں کا درمیانی زاویہ مستقل ہوتا ہے اور ان کے مقیاس مستقل نسبت رکھتے ہیں۔ اس کو عام طور پر یوں بیان کیا جاتا ہے کہ  $\Delta$  اور  $\Delta$  سے مرتسم شدہ شکلیں اپنے لائنیاں چھوٹے حصوں میں ایک دوسرے کے متشابه ہیں۔

اس دفعہ کے مضمون پر مزید تحقیق مطلوب ہو تو کتاب کے آخر میں نوٹ ج کا مطالعہ کیا جائے۔

۱۲۳۔ ملف عددی اصلوں کی تعین۔ کعبی کا حل۔

مساواتوں کے نظریہ پر جو تصنیفات موجود ہیں ان میں مساواتوں کی ملف عددی اصلوں کو عملی طور پر متعین کرنے کی طرف بہت کم توجہ کی گئی ہے اور نہ یہ آسان ہے کہ ابتدائی درسی کتاب میں جہیں عام



(262)

طریقہ درج ہوں اسکی وضاحت خاطر خواہ کیجا سکے۔ نظری طور پر اس مسئلہ میں کوئی اشکال نہیں کیونکہ اگر ف (لا + خما) کے حقیقی اور خیالی حصے جدا گانہ صفر کے مساوی رکھے جائیں اور محصلہ دو مساواتوں سے کسی ایک متغیر کو باقیا کر دیا جائے تو ایک مساوات حاصل ہوگی جس سے دوسرے متغیر کی حقیقی قیمت ہارنر کے عمل سے محسوب کیجا سکتی ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طریقہ کی عملی قدر و قیمت کچھ بھی نہیں ہے۔\*

ہم اس دفعہ اور دفعات آئندہ میں اپنی توجہ صرف کعبی اور چار درج مساواتوں تک محدود رکھینگے جن کے سر حقیقی اعداد ہوں۔ ان مثالوں میں صرف اس عمل حسابی کو پیش کیا جائیگا جو عملی مقاصد کے لئے سادہ ترین شکل رکھتا ہے۔ فرض کرو کہ حل کے لئے مساوات

$$F(لا) = لا^۳ + ف لا^۲ + ق لا + ر = ۰$$

تجویز کی گئی ہے۔ اس کی اصلوں کو ع، ہ، ک + ک، ہ۔ ک مان لیا جاسکتا ہے جنہیں ع حقیقی ہے اور باقی اصلوں کی نوعیت خود اشنا ہے

\* طالب علم اگر ماہرین ریاضی کی ان کوششوں کا مطالعہ کرنا چاہیں جو انہوں نے عددی مساواتوں کی ملتف اصلوں کو دریافت کرنے کے لئے کی ہیں تو وہ حسب ذیل کتابوں سے مدد لے سکتے ہیں۔ ۱۔ لگرنج :- مقالہ برائے حل عددی مساوات۔ ۲۔ مرفی :- جبری مساواتوں کا نظریہ ۳ :- سائمن سٹینر :- عددی مساواتوں کا عام حل (دیں ۱۸۵۱ء)۔ پی۔ سی۔ یلینگ :- اعلیٰ عددی مساواتوں کا حل (مطبوعہ لائپزک ۱۸۶۵ء) امیری ملیا کلنٹوک :- وقت واحد میں کسی مساوات کے تمام اصلوں کو دریافت کرنے کا طریقہ۔ (امریکن جرنل آف میاٹھمیاٹکس جلد ۷، ۱ شمارہ ۲۱) ۶۔ ایم۔ ای۔ کاروالو :- جبری یا ماورائی مساواتوں کا مکمل عددی حل دریافت کرنے کا عملی طریقہ (مطبوعہ پیرس ۱۸۹۶ء)۔



عمل حساب میں معلوم ہو جائے گی کیونکہ ک کی تعیین اس کے مربع سے ہوتی ہے جو ممکن ہے منفی ہو یا مثبت۔ مساوات کی کوئی ابتدائی تحلیل ضروری نہیں۔ اگر لا کی بجائے  $h + k$  درج کیا جائے اور ک کی جفت اور طاق قوتوں کے مجموعوں کو جدا گانہ صفر کے مساوی رکھا جائے (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۳۲۳) تو ہمیں فوراً ذیل کی مساوات مل جاتی ہے:-

$$-k^2 = f^2 (h) = 3h^2 + 2fh + f^2$$

نیز ک سا قہ کرنے سے  $h$  کو متعین کرنے کے لئے ایک کعبی مساوات حاصل ہوتی ہے لیکن اس مساوات کو بنانے کی ضرورت نہیں پڑے گی کیونکہ  $h$  کو سب سے زیادہ آسان طریقہ سے مساوات  $h^2 + 2fh + f^2 = 0$  سے معلوم کیا جاسکتا ہے جبکہ  $h$  کو سب سے پہلے ہارنر کے طریقہ سے حسب معمول دریافت کر لیا گیا ہو۔

آخر میں ک کا محسوب کرنا ضروری ہے اور اس کے ساتھ باقی دو اصلوں کا خواہ وہ خیالی ہوں یا حقیقی۔ اس مقصد کیلئے ذیل کا طریق عمل سہولت بخش ہو گا:-

سروں کے رقوم میں  $h$   $f^2$  (ع) کی قیمت  $f^2 - 3f$

ہے یعنی

$$f^2 (ع) + f^2 (h + k) + f^2 (k - h) = f^2 - 3f$$

$$f^2 (h + k) + f^2 (k - h) = 2f^2 (h) + 4k^2$$

$$f^2 (ع) + 4k^2 = f^2 - 3f$$

جس سے ک کو بہت تھوڑی محنت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ  $f^2$  (ع) کی عددی قیمت ہارنر کے مکمل یافتہ عمل میں جو آخری استحالة ہے اس میں آخر سے دوسرے سرے



لکھی جاسکتی ہے۔ باقی دو اصلوں کی نوعیت اس طور پر حاصل شدہ  
عدد کی علامت پر منحصر ہوگی اور اس عدد کے مثبت اور منفی جذور المربع  
لینے سے خود اصلیں معلوم ہو جائیں گی۔

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$لا^۳ + لا^۲ - لا^۳ - لا = ۰$$

کو حل کرو۔

سب سے پہلے مثبت حقیقی اصل معلوم کرو جو ہارنر کے طریقہ سے  
چار استحالوں کو مکمل کرنے سے حاصل ہوگی اور آخری استحالہ کے سر ہونگے۔

$$۲۲۳۲۱۸۹۶ - ۷۶۶۰۹۸۶۸۱۷۰۲۰۱$$

یہ ذہن نشین رکھو کہ اصلوں کو تین مرتبہ ۱۰ سے ضرب دیا گیا ہے  
ہم ف (ع) اور ف (ع) کی قیمتیں پہلی صورت میں داہنی طرف سے  
نو ہندسے اور دوسری صورت میں چہ ہندسے کاٹنے اور علامت غائر  
لگانے سے معلوم کرتے ہیں۔ بہتر یہ ہوگا کہ مختصر طریقہ سے تقرب کو اور  
دو منسلکوں تک لیجا کر ف (ع) کی زیادہ صحیح قیمت معلوم کی جائے چنانچہ  
اس طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف (ع) = ۷۶۶۲۸۶$$

اسکو ف<sup>۲</sup> - ۳ ق (جو ۷۳ کے مساوی ہے) میں سے فرق کرنے سے

$$ک۴ = ۳۶۶۲۸۶$$

اب چونکہ یہ منفی ہے اسلئے یہ ثابت ہو گیا کہ باقی دو اصلیں خیالی  
ہیں۔ ع کی حاصل شدہ قیمت ۵۶۱۳۴۵۷ سے یہ کی قیمت فوراً

- ۳۶۵۶۷۲ ملجائی ہے اور ۶۶۲۸۶ کو ۴ سے تقسیم کرنے اور اسکا  
مربع لینے سے بالآخر مساوات کی ملقف اصلیں حاصل ہو جاتی ہیں جو یہ ہیں



$$1-1-59522 \pm 355642$$

۲۔ نیوٹن کے کعبی (دیکھو دفعہ ۱۰۷)

$$لا^2 - لا^2 = 5$$

کو پوری طرح حل کرو۔

ہارنر کے طریقہ سے چار استحالوں کی تکمیل کرنے اور مثال سابق کی طرح عمل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں  $ع = 59522 - 25$  اور

$$ف = (ع) = 11516048$$

$$ک^2 = 15290195$$

پس اور باقی دو اصلیں (جنکا خیالی ہونا ثابت ہے) حاصل ہوتی ہیں

$$1-1-1513542 \pm 1504422$$

۳۔ دفعہ ۱۰۹ صفحہ ۳۴۹ کی مثال ۱

$$لا^3 + لا^2 + لا - 100 = 0$$

کی باقی دو اصلیں معلوم کرو۔

ہم حاصل کرتے ہیں

$$ف = (ع) = 6450821، ک^2 = 16552102$$

اور مطلوبہ اصلیں ہیں

$$1-1-445-544 \pm 256322$$

۴۔ مساوات

$$لا^2 - لا^2 = 3 + لا^2$$

کو حل کرو۔

۲۰ سے تقسیم کرو اور مساوات  $لا^2 - لا^2 = 15 + لا^2$  کی وہ اصل

ہارنر کے طریقہ سے معلوم کرو جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے تو معلوم ہوگا کہ  $ع = 6450821$  اور  $ف = (ع) = 16552102$  اس لئے

$$ک^2 = ف^2 - 3ق - ف = (ع) = 16552102 + 16552102 = 33104204$$



پس ک ۲ = ۸۴۱ + ۴ اور اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں۔ ہم حاصل کرتے ہیں ۵ = ۶۹۸ + ۳ اور ک کو جمع اور تفریق کرنے سے یہ دوسری اصلیں معلوم ہوتی ہیں ۶۸۶۵ - ۱۶ اور ۶۳۱۴۶۹ - (دیکھو مثال ۱۵ صفحہ ۳۰۲)۔

۵۔ لگرائج کے کعبی

$$\text{لاگ} - \text{لا} + \text{ع} = ۰$$

کو پوری طرح حل کرو۔  
تمام اصلوں کی علامتیں بدلو اور استحالہ شدہ مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصل ع معلوم کرو جو ۱۳ اور ۴ کے درمیان ہے تو  
ع = ۳۶۰۴۸۹۱۷۳ اور ف (ع) = ۳۷۸۸۷۳۷ - ۲۰  
پس ک ۲ = ۵۰۲۸۱۵۷۵ اور ک = ۱۶۷۷۸ - نیز ۵ = ۱۵۲۴۴۵۸  
اور ان سے ۵ + ک اور ۵ - ک کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔ اس طور پر حاصل کردہ سب اصلوں کی علامتیں بدلنے سے دی ہوئی مساوات کی اصلیں حاصل ہوتی ہیں

۳۶۰۴۸۹۱۷۳، ۱۵۳۵۶۲، ۱۵۶۹۲۲ (دیکھو مثال اوقہ ۱۱۱)  
اوپر جو مثالیں دی گئی ہیں وہ یہ بتانیکے لئے کافی ہیں کہ اصلوں کی نوعیت کی قبل از قبل جانچ کئے بغیر کس طرح دئے ہوئے کعبی کو حل کیا جاسکتا ہے۔ یہ تصفیہ کرنے کے لئے کہ کعبی کی دوسری دو اصلیں حقیقی ہیں یا خیالی جو محنت برداشت کرنی پڑتی ہے وہ اس محنت سے کچھ ہی زیادہ ہے جو اسٹرم کے مسئلہ کو استعمال کرنے میں لاحق ہوتی ہے اور وہ مزید محنت جو اصلوں کو واقعی طور پر معلوم کرنے کے لئے ضروری ہے بہت خفیف ہے۔ اب ہم چار درجی مساوات پر غور کریں گے۔

۱۲۵۔ چار درجی کا حل۔ جب چار درجی کی اصلیں (دو یا چار)

حقیقی ہوں تو اسکو بھی دفعہ ماضی میں بیان کردہ طریقہ کے مشابہ طریقہ سے



حل کیا جاسکتا ہے۔ بعض مثالوں میں حقیقی اصل کے وجود کو فوراً پہچان لیا جاسکتا ہے اور جب ایسی صورت ہو تو مساوات کے مکمل حل کے لئے طریقہ ذیل کا استعمال کرنا فائدہ مند ہوگا۔ فرض کرو کہ مجوزہ مساوات ہے

ف (لا) = لا + ف لا + ق لا + ر لا + س =  
اور اسکی حقیقی اصلیں ہیں 'ع' یہ۔ باقی دو اصلوں کو ھ + ک اور ھ - ک سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس آخری زوج کے متعلق کسی قسم کا مفروضہ اختیار نہیں کیا گیا۔ فرض کرو کہ ع اور یہ دونوں کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے اور ف (ع) اور ف (یہ) کی عددی قیمتیں بھی دفعہ ماضی کی طرح معلوم کر لی گئی ہیں۔ اب اگر ف (لا) میں لا کی بجائے ھ + ک درج کیا جائے اور مثال ۲۶ صفحہ ۲۴ کا طریق حل استعمال کیا جائے تو بلا تکلف حاصل ہوتا ہے

$$- ک = \frac{۶ ف (ھ) = ۴ ھ + ۳ ف ھ + ۲ ق ھ + ر}{۵ ھ + ف}$$

پھر جیسا کہ ثابت کیا جا چکا ہے

$$ف (ع) + ف (یہ) + ف (ھ + ک) + ف (ھ - ک) = ف + ۲ ق - ۸ ر$$

اور اسلئے  
۴ ک = (۴ ھ + ف) = ف (ع) + ف (یہ) + ف + ۲ ق - ۸ ر  
اس ضابطہ کو ک کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے جبکہ ھ کی قیمت پہلے سے ہی مساوات ع + یہ + ھ = ف سے حاصل کر لی گئی ہو۔ پھر اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے کہ اصلوں کا دو سر ازواج خیالی ہے یا حقیقی ہو جب اسکے کہ ک منفی ہے یا مثبت۔

مثالیں







$$-۴۸۰۳۲۱ \pm ۳۹۰۰۲۲۶ - ۱$$

۳۔ مساوات

$$۲ - لا۲ - لا۱۳ + لا۱ - لا۱۹ = ۰$$

کو حل کرو۔

اسکی دو اصلیں حقیقی ہونی چاہئیں، ایک (ع) مثبت اور دوسری (ب) منفی۔ ۲ سے تقسیم کرو اور مساوات کو اس شکل میں لکھو:-

$$ف (لا) = لا۲ - لا۱۳ + لا۱ - لا۱۹ = ۰$$

جب 'ف' (لا) = ۰ کی اصلوں کی علامتوں کو بد لکر، یہ محسوب کر لیا جائے تو ف (ب) کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ہارنر کے عمل سے حاصل شدہ آخری استحالیہ میں آخر سے جو دوسرا سر ہے اسکی علامت بدلتی چاہئے۔

$$ع = ۳۳۰۳۵۰۲۶۵ - ۲۶۵۰۳۰۵۵ = ۳۶۰۳۰۵۵$$

$$ف (ع) = ۳۲۶۴۰۰۹ - ۳۲۶۴۰۰۹ = ۰$$

$$\frac{۵۶۴۰۳}{۱۶۱۴۶۴} = ۲ - ک$$

اور خیالی اصلیں ہیں

$$-۶۲۸۶۶ \pm ۹۲۴۰۱۶ - ۱$$

۴۔ مساوات

$$لا۲ - لا۸ - لا۱۹۹۸ + لا۱۴۹۳۰ + لا۵۰۰۰ = ۰$$

کو حل کرو۔

صریحاً ایک اصل صفر اور ایک کے درمیان ہے اور دوسری کا ۱۲ اور ۱۳ کے درمیان واقع ہوتا آسانی کے ساتھ معلوم ہوتا ہے (دیکھو مثال ۴ دفعہ ۹۳)

$$ع = ۹۸۰۳۵۰۶ - ۱۲۶۰۵۶۴۴ = ۱۲۶۰۵۶۴۴$$

$$ف (ع) = ۱۳۵۶۴ - ۱۳۵۶۴ = ۰$$

$$\frac{۴۱۳۶۳}{۵۳۶۰۸۵} = ۲ - ک$$

اسلئے



اسلئے باقی دو اصلیں حقیقی ہیں اور آسانی کے ساتھ معلوم ہوتی ہیں ۶۰۲-۳۲۴

اور ۲۲ ۸۳ ۳۲۴ -

اس مساوات کی سب اصلوں کو ینگ نے ہارنر کے طریقہ سے محسوب کیا ہے (دیکھو، کعبی اور چاردرجی مساواتوں کی تحلیل اور حل صفحہ ۲۱۶ تا ۲۲۱) اور ہم نے آخر میں جو دو اصلیں حاصل کی ہیں وہ ینگ کے حاصل کردہ قیمتوں کے مطابق ہیں۔

۱۲۶۔ چاردرجی کا حل (گذشتہ سے پیوستہ) جب چاردرجی

کی سب اصلیں خیالی ہوں تو ظاہر ہے کہ دفعہ ماسبق کے حل کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ اس صورت میں اور عموماً اصلوں کی نوعیت خواہ

کچھ ہی ہو طریقہ ذیل استعمال کیا جاسکتا ہے :-  
فرض کرو کہ مساوات سب سے پہلے اسکی دوسری رقم کو خارج کر دینکے بعد شکل ذیل میں لکھی گئی ہے۔

ف (لا) = لا + ق لا + ر لا + س =  
اسکی اصلوں کو  $h \pm k$ ،  $h \pm k$ ،  $h \pm k$ ، فرض کیا جاسکتا ہے  
یہاں اصلوں کی نوعیت کے متعلق کوئی مفروض اختیار نہیں کیا گیا ہے۔  
آنجی نوعیت ک<sup>۲</sup> اور ک<sup>۲</sup> کو محسوب کر لینے کے بعد انکی علامتوں پر  
منحصر ہوگی۔ لا کی بجائے  $h + k$  درج کرنے اور پہلے کی طرح عمل  
کرنے سے

$$k^2 = \frac{f(h)}{h^2} = \frac{h^2 + 2qh + r}{h^2}$$

یعنی  $k^2 = h^2 + 2qh + \frac{r}{h}$

جس سے ک معلوم ہوتا ہے جبکہ  $h$ ، معلوم ہو جائے۔ ک کو  
جب مثال ۲۶ صفحہ (۲۲۴) کی دو مساواتوں سے ساقط کیا جاتا ہے تو



ہ میں جو چھ درجہ حاصل ہوتا ہے وہ کعبی

میں تحویل ہو جاتا ہے جسکی ایک اصل ۴ ہے۔ اس کعبی کی ایک اصل مثبت ہوتی چاہئے۔ باقی دو اصلیں دونوں مثبت، دونوں منفی یا دونوں خیالی ہو سکتی ہیں بموجب اس کے کہ دئے ہوئے چار درجہ کی اصلوں کی نوعیت کیا ہے۔ یہ مساوات فی الواقعہ زیر بحث چار درجہ کے لئے (دیکھو مثال ۴ صفحہ ۱۸۳) محول کعبی ہے (جسکی اصلوں کو ۴ سے ضرب دیا گیا ہے)۔ فرض کرو کہ اس کی مثبت اصل کو ہارنر کے عمل سے محسوب کر لیا گیا ہے (اگر تینوں اصلیں مثبت ہوں تو کسی ایک کا محسوب کرنا کافی ہے) اس طرح ۴ متغیر ہو جاتا ہے اور اس سے ۵۔ پھر مجوزہ چار درجہ کا پورا حل ان دو ضابطوں سے مل جاتا ہے:۔

$$\pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)}$$

## مثالیں

۱۔ مساوات

$$x^4 + 10x^2 + 1 = 0$$

کا مکمل حل معلوم کرو۔

اس مساوات کو مرفی (Murphy) نے (اپنی کتاب "مساواتوں کا نظریہ" صفحہ ۲۵ میں) اپنے اس مجوزہ طریقہ کی توضیح میں استعمال کیا ہے جو متوالی سلسلوں کی مدد سے مساواتوں کی خیالی اصلوں کو متعین کرتا ہے ہمیں فوراً محول کعبی حاصل ہوتا ہے

$$x^2 - 10x + 1 = 0$$



اور ہارنر کے عمل سے اسکی مثبت اصل  $۶۵۳۳۷.۱۸۴$  ہے۔ پس  $۵$  کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے اور اس سے  $۵ = \pm ۱۶۲۵۸۶$  پھر ہم حاصل کرتے ہیں  $\frac{1}{5} = \pm ۵۷۹۴۵$ ۔ بموجب اسکے کہ  $۵$  کی علامت مثبت یا منفی استعمال کی گئی ہو۔ ہر صورت میں جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اس لئے سب اصلیں خیالی ہیں۔ ان کو آسانی کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے اور وہ یہ ہیں

$$\pm ۱۶۲۵۸۶ \pm ۱۶۲۵۸۶ \pm ۱۶۱۷۷۱ \pm ۱۶۱۷۷۱ - ۱$$

۲۔ مساوات

$$۱۰ + ۹ - ۶ - ۵ = ۰$$

کو حل کرو۔

اس مساوات پر اسپٹزر (Spitzer) نے بحث کی ہے  
(Allgemeine Auflosung der Zahlen-)

$$(Gleichungen. p. 15. = ۳۶ - ۶۱ + ۱۸ + ۱۸ - ۳۶)$$

جسکی مثبت اصل  $۶۵۱۰۹۴۲۴۹$  ہے۔ پس  $۵ = \pm ۵۳۵۷۴۰$  اور اسلئے  $\frac{1}{5} = \pm ۱۶۵۸۷۸$  اور ہر صورت میں، خواہ  $۵$  کو مثبت لیا جائے یا منفی، جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ منفی ہے اور اسلئے

سب اصلیں خیالی ہیں۔ یہ چار اصلیں ہیں

$$\pm ۱۶۵۸۷۸ \pm ۱۶۵۸۷۸ \pm ۵۳۵۷۴۰ \pm ۵۳۵۷۴۰ - ۱$$

۳۔ مساوات

$$۱۰ - ۲ - ۳ - ۷ + ۱۰ + ۱۰ = ۰$$

کو حل کرو۔

دوسری رقم کے اخراج کے لئے اصلوں کو ۲ سے ضرب دو اور پھر ان کو بقدر ایک کے گھٹاؤ۔ استحالة شدہ مساوات کا محمول کبھی آسانی کے ساتھ



حاصل ہوتا ہے

اسکی اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرو اور معلوم کرو کہ استحالة شدہ مساوات  
ایک اصل ۶ اور ۷ کے درمیان ہے جو ہارنر کے عمل سے حاصل ہوتی  
ہے  $۶۵۲۹۸۳۸ - ۶۵۲۹۸۳۸ = ۰$  پس  $۶۵۲۹۸۳۸ = ۶۵۲۹۸۳۸$  اور  $۳۵۹۶۸ \pm = ۳۵۹۶۸$   
اب خواہ  $۵$  کو مثبت لیا جائے یا منفی یہ معلوم ہوتا ہے کہ جذر اطرع  
کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت عدد ہے اور اسلئے اس صورت میں  
تمام اصلیں حقیقی ہیں۔ چنانچہ ہم معلوم کرتے ہیں کہ  $۲ = ۲$  اور  $۹۵ - ۹۵ = ۰$   
کے  $۲ = ۲$  پس  $۹۵ - ۹۵ = ۰$  اور  $۱۵۰ - ۱۵۰ = ۰$  اور  $۵۴۶ \pm = ۵۴۶$   
اب دوسری رقم کو خارج کرنے میں جو دو استحالے عمل میں لائے گئے تھے  
ان کو حساب میں شامل کر لینے سے مطلوبہ اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$۲۵۲۳۶ - ۲۵۲۳۶ = ۰$$

اس نتیجہ کی آسانی کے ساتھ تصدیق ہو سکتی ہے کیونکہ یہ دیا ہوا  
تفاعل اجزائے ضربی لاء ۵ اور لاء ۲ کا حاصل ضرب ہے (مثال  
۵ صفحہ (۳۱۴) کے ساتھ مقابلہ کرو)۔

۴ — مساوات

$$لا - لا + لا - لا = -$$

کو حل کرو۔

اس مثال پر جلینک (Jelinek) نے بحث کی ہے

Die Aufösung höheren numerischen Gleichungen, P. 29  
کرنے کے لیے اصلوں کو ۴ سے ضرب دو اور پھر بقدر ۷ کے گھٹاؤ۔ اس طریقہ سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$لا - لا + لا - لا = ۳۰۵۹$$

جسکا محول کبھی ہے

اسکی مثبت اصل کا محل کرنے کے لئے اصلوں کو ۱۰ سے تقسیم کرنا بہتر ہوگا  
ما - ما + ما - ما = ۲۶۳۷۳۶۰



جس سے استحالة شدہ مساوات کی ایک اصل کا ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہونا معلوم ہو جائیگا۔ ہارنر کے عمل سے یہ اصل حاصل ہوتی ہے ۲۶۰۵۹۱۔ اسلئے  
 $۲۶۰۵۹۱ = ۲۰۵۹۱ + ۶۰۵۹۱$ ۔ اب اگر ۵ کو مثبت لیا جائے  
 تو جذر المربع کے تحت جو مقدار ہے وہ مثبت ہے اور اس لئے دو اصلیں  
 حقیقی ہیں۔ اگر ۵ کو منفی لیا جائے تو جذر المربع کے تحت کی مقدار منفی  
 ہے اور اسلئے دو اصلیں خیالی ہیں۔ پس دوسری رقم کو خارج کر نیکیے لئے  
 جو دو استحالے عمل میں لانے پڑے ان کو حساب میں شامل کر لینے کے بعد  
 مجوزہ مساوات کی چاروں اصلیں حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں  
 $۱۶۰۳۳ \pm ۰۶۰۳۲ - ۱۶۰۹۱$  ۵۹۹۳

۵۔ مساوات

$$لا - لا + لا ۱۹۹۸ - لا ۱۴۹۳۷ + لا ۵۰۰۰ = ۵$$

کو حل کرو۔ یہ ینگ کی مساوات ہے جسکو دفعہ مابقی میں حل کیا گیا تھا۔ ہم  
 اس کے حل کو اس دفعہ کے طریقہ سے مکرر معلوم کرتے ہیں تاکہ طالب علم کو  
 اس محنت کا اندازہ ہو جائے جو دونوں طریقوں میں کرنی پڑتی ہے جب  
 دوسری رقم آسانی کے ساتھ جدا ہو جائے (جیسا کہ اس مثال میں) یا  
 جب دوسری رقم خود مساوات میں موجود نہ ہو تو یہ معلوم ہو گا کہ دفعہ  
 ہذا کا طریقہ دفعہ مابقی کے طریقہ سے زیادہ آسان ہے۔ اصلوں کو بقدر  
 ۲۰ کے گھٹانے سے استحالة شدہ مساوات ہے

$$لا - لا + لا ۹۸۳ + لا ۲۵۴۶۰ = ۲۵۴۶۰$$

جسکا محول کعبی ہے

$$لا - لا + لا ۸۰۴ + لا ۶۲۷۵۹ - لا ۹۶۶۳۸۹ = ۹۶۶۳۸۹$$

ہارنر کے عمل سے  $۲۶۰۵۹۱ = ۲۰۵۹۱ + ۶۰۵۹۱$  اور اس لئے

۵ =  $۱۳۶۴۷۲ \pm ۶۲۷۵۹$  کی علامت کچھ ہی جو جذر المربع کے تحت  
 کی مقدار مثبت ہے اور اسلئے چاروں اصلیں حقیقی ہیں جسکو معلوم کر نیکیے لئے



یہ دو ضابطے ہیں

$$- \pm 5 \sqrt{39 \leq 38 \pm 5} \pm 5 \sqrt{192.9} \pm 5$$

پس ہر اصل میں ۲۰ جمع کرنے سے مجوزہ مساوات کی یہ چار اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$325.6.3 \pm 325.8321 \pm 3511 \pm 3511 \pm 3511 \pm 3511$$

۶۔ مثال ۴ صفحہ ۳۵۲ کی مساوات

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

کو پوری طرح حل کرو۔

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

۷۔ مثال ۲ صفحہ ۳۱۳ کی مساوات

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

کو پوری طرح حل کرو۔

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

۸۔ مثال ۴ صفحہ ۳۲۱ کی مساوات

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

کو حل کرو۔

اصولوں کو ۴ سے ضرب دو اور دوسری رقم کو خارج کرو۔ اسکے محول

کبھی پر ہارنر کا طریقہ استعمال کرو تو معلوم ہوگا کہ اسکی ایک متوافق اصل ۱۸۰

ہے، پس  $h = 3$ ۔ حل کو آسانی کے ساتھ مکمل کیا جاسکتا ہے اور

مجوزہ مساوات کی چار خیالی اصولوں کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

۹۔ مثال ۱۴ صفحہ ۳۷۱ کی مساوات

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

کی خیالی اصلیں معلوم کرو۔

$$- \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots - \pm 1 \dots$$

جواب :-



(271)

## نوٹ (۱) مساواتوں کا جبری حل

مساوات درجہ دوم کا حل عربوں کو معلوم تھا چنانچہ محمد بن موسیٰ اور نویں صدی کے دیگر مصنفین کی تصنیفات میں اسکا ذکر موجود ہے۔ عمر خیام کا ایک مقالہ جبر و مقابلہ کے مضمون پر، اسوقت موجود ہے جو شاید گیارہویں صدی کے وسط میں تحریر کیا گیا تھا۔ اس میں کعبی مساواتوں کی جماعت بندی ہندی ہندسی عمل کے طریقوں کے ساتھ مل گئی ہے لیکن عام حل حاصل کرنے کی کوئی کوشش نہیں کی گئی۔ تیرہویں صدی کے شروع میں لیونارڈو (مقام پی سا کا باشندہ) نے عربوں سے اس مضمون کی تحصیل کی اور اس کو اٹلی میں منتقل کیا اور اسوقت سے ایک عرصہ دراز تک اٹلی واپے اس علم کے سرپرست رہے۔ لوکس پیاسیولس نے (جو لوکس ڈی برگو کے نام سے مشہور ہے) ایک کتاب "L'Arte Maggiore" کے نام سے ۱۴۹۴ء میں شائع کی۔ اس نے کعبی مساواتوں میں عربوں کی جماعت بندی کا تتبع کیا اور یہ رائے ظاہر کی کہ اس علم کی موجودہ حالت کا لحاظ کرتے انکا حل حاصل کرنا اتنا ہی ناممکن ہے جتنا دائرہ کی تریج کرنا۔ لیکن اس کے ساتھ ہی وہ اس بات کا بھی اشارہ کرتا ہے کہ اس علم کی ترقی میں سب سے پہلا مسئلہ یہی ہو گا جسکی طرف علماء ریاضی کی توجہ منعطف ہوگی۔ مساوات  $لا + م = ن$  کا حل سیپیو فیرو (Scipio Ferreo) نے معلوم کیا لیکن اس کے انکشاف کا حل کسی کو معلوم نہ ہو سکا سوائے اس بات کے کہ اس نے اپنے طالب علم



فلاریڈو کو ۱۵۰۵ء میں اس حل سے آگاہ کیا۔ ٹارٹاگلیا (Tartaglia) کی توجہ اس مسئلہ کی طرف ۱۵۳۰ء میں منعطف ہوئی اور وہ بھی اس اس وجہ سے کہ کولا (colla.) نے ایک ایسا مسئلہ تجویز کیا تھا جس کا حل  $لا + ف = لا = ق$  کی شکل کی کعبی مساوات پر منحصر تھا۔ فلاریڈو کو جب اس بات کا علم ہوا کہ ٹارٹاگلیا نے اس مساوات کا حل حاصل کر لیا ہے تو اس نے  $لا + م = لا = ن$  کی شکل کی کعبی مساوات کے حل کا جو اسکو معلوم تھا اعلان کر دیا۔ ٹارٹاگلیا کو اس کے بیان کی صداقت پر شبہ ہوا اور اس نے ۱۵۳۵ء میں اسکو دعوت مقابلہ دیدی اور اس اثناء میں خود بھی  $لا + م = لا = ن$  کا حل دریافت کر لیا۔ یہ حل لا کی بجائے

(272)

۳ات - ۳ع فرض کرنے پر منحصر ہے جو دو جذرا لکعبوں کے فرق پر مشتمل ہے۔ کارڈن کے نام سے جو حل منسوب کیا جاتا ہے وہ دراصل اسی حل کی بنیاد پر قائم کیا گیا ہے۔ ٹارٹاگلیا نے اپنی سعی کو جاری رکھا اور مختلف شکل کی کعبی مساواتوں کو جو عرب مصنفین کی تقسیم کے تحت آتی تھیں حل کر نیکے لئے قوانین دریافت کئے۔ کارڈن نے جو ان قوانین کو حاصل کرنے کی فکر میں تھا ٹارٹاگلیا سے درخواست کی مگر ناکام رہا۔ آخر بہت کچھ محنت سماجست کے بعد ٹارٹاگلیا رضی ہوا اور اس نے ان قوانین کی تفہیم کی مگر ساتھ ہی کارڈن سے وعدہ لے لیا کہ وہ اس کو اپنے سینہ میں راز کے طور پر محفوظ رکھیکا اور کسی کو اسکا علم نہ ہونے دینگا۔ اسے وعدہ کو بالائے طاق رکھکر کارڈن نے ٹارٹاگلیا کے قوانین کو اپنی عظیم الشان تصنیف "Ars Magna" میں ۱۵۴۵ء میں شائع کر دیا حالانکہ ٹارٹاگلیا کا ارادہ تھا کہ وہ ان کو اپنی تصنیف میں شائع کریگا۔ اس نے اپنی تصنیف کی ابتدا ۱۵۵۰ء میں کی لیکن ۱۵۵۹ء میں کعبی مساواتوں کی بحث پر پہنچنے سے پہلے ہی انتقال کر گیا۔ اب چونکہ اس کی تصنیف میں اس کے دریافت کردہ قوانین کا



ذکر موجود نہ تھا یہ قوانین امتداد زمانہ کی باعث کارڈن سے منسوب  
کئے جانے لگے اور ان کے انکشاف کا سہرا اسی کے سر باندھ دیا گیا۔  
ظاہر ہے کہ اسکے بعد علماء جبر و مقابلہ کی توجہ فطرتاً درجہ چہارم  
کی مساواتوں کے حل کی طرف منقطعت ہوئی اور یہاں بھی گولا ہی اسکا  
باعث ہوا کیونکہ اس نے مساوات

$$لا + ۶ = لا + ۳۶ = ۶۰ لا$$

کو حل کرنے کی تجویز اُس وقت کے علماء کے سامنے پیش کی۔  
کارڈن نے اس قسم کی مساواتوں کے لئے ایک ضابطہ حاصل کر نیکی  
سعی کی لیکن اسکا انکشاف اس کے طالب علم فیرارے (Ferrari)  
کی قسمت میں تھا۔ فیرارے نے جو طریقہ استعمال کیا تھا وہ ایک استحالہ  
پر مبنی ہے جس سے مساوات کی طرفین کا حل مربع بن جاتی ہیں۔ اس میں ایک نئی  
مقدار حاصل کی جاتی ہے جو خود ایک تیسرے درجہ کی مساوات سے  
متعین ہوتی ہے۔ یہ فی الحقیقت خاصیت میں دفعہ ۶۳ کا طریقہ  
ہے اور اس کو بعض اوقات بومبلی (Bombelli) سے منسوب کیا جاتا  
ہے جس نے اسکو اپنے مقالہ جبر و مقابلہ میں ۱۵۴۹ء میں شائع کیا۔  
سمسن کے نام سے جو حل مشہور ہے وہ اگرچہ بہت بعد (تقریباً ۱۶۴۲ء میں)  
شائع ہوا لیکن اصولاً کسی حال میں بھی فیرارے کے حل سے مختلف نہیں  
ہے۔ ۱۶۳۷ء میں ڈیکارٹ کا شہرہ آفاق رسالہ شائع ہوا جس میں علم  
جبر و مقابلہ کی بہت سی ترمیمات و اصلاحات درج ہیں۔ ان میں سے  
قابل ذکر یہ ہیں، مساواتوں کی منفی اور خیالی اصولوں کی جانچ اور اس کا  
علامتوں کا قانون۔ چار درجہ کو دو دو درجہ اجزاء کے حاصل ضرب  
کی شکل میں بیان کرنا اگرچہ فیرارے کی شکل سے آسانی کے ساتھ اخذ  
ہو سکتا ہے تاہم چار درجہ کے حل میں قابل قدر اضافہ ہے۔ یولر کا  
جبر و مقابلہ ۱۷۷۰ء میں شائع ہوا۔ اس نے چار درجہ کا جو حل پیش  
کیا ہے (دیکھو دفعہ ۶۱) وہ اس لحاظ سے اہم ہے کہ اس کی شکل اور



کبھی کے حل کی شکل میں تطابق اور تشابہ پایا جاتا ہے کیونکہ دونوں صورتوں میں اصل کے لئے غیر منطوق جملہ فرض کر کے مساواتوں کو حل کیا جاتا ہے ڈیکارٹ اور پولر کے طریقے ان کوششوں کا نتیجہ ہیں جو انہوں نے مساواتوں کا عام جبری حل دریافت کرنے میں کی تھیں۔ اٹھارویں صدی میں علماء ریاضی نے اس مسئلہ پر بہت زور لگایا اور بڑی چھان بین کی مگر چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجوں کی مساواتوں کی صورت میں انکی محنت کامیاب نہیں ہوئی۔

کبھی اور چار درجی کے جو حل علماء قدیم نے حاصل کئے انہیں دو جداگانہ طریقے ہمارے مشاہدہ میں آتے ہیں۔ پہلا وہ ہے جو گالیا اور پولر کے مفروضات پر مبنی ہے اور جس کی ابتدا اصل کیلئے ایک غیر منطوق تصریحی شکل اختیار کرنے سے ہوتی ہے۔ دوسرا وہ ہے جس میں دئے ہوئے تفاعل کے ایک استحالہ کی مدد سے اس بات کا کھوج لگایا جاتا ہے کہ آیا اس کے اجزائے ضربی کی نوعیت بدلی جاسکتی ہے تاکہ وہ ایسی شکل میں تحویل ہو جائے جو آسانی سے تحلیل ہو سکے۔ دفعہ ۵۵ میں یہ دونوں طریقے بیان کر دئے گئے ہیں اور ان کے ساتھ ایک تیسرے کا بھی ذکر کیا گیا ہے جسکو واندرمند اور لکرائج نے دریافت کیا تھا۔ انہوں نے اپنی تحقیقاتوں کو اسی زمانہ میں شائع کیا تھا یعنی ۱۷۷۰ء اور ۱۷۷۱ء میں۔ ان میں سے واندرمند ہی پہلا شخص تھا جس نے کسی مساوات کے جبری حل کی ضرورت خاصیت کو صاف طور پر واضح کیا جو یہ ہے کہ کسی مساوات کا جبری حل جذری علامات (جو اس میں شامل ہوتی ہیں) کے اجتماع کی وجہ سے تمام اصلوں کو بلا امتیاز تعبیر کرنا چاہئے جبکہ اس میں شامل ہونے والے ممبروں کے تفاعلوں کی بجائے اصلوں کے متشاكل تفاعل درج کے جائیں (دیکھو دفعہ ۱۰۱)۔ کبھی اور چار درجی کی صورتوں میں اس نوعیت کے ضابطے حاصل کرنے میں اس کی کوششیں بار آور ہوئیں لیکن



پانچ درجی کی صورت میں ناکام رہیں۔ لگرائج نے اپنے پیش روؤں کی محنتوں کو جو مساواتوں کا عام حل دریافت کرنے میں صرف ہوئی انھیں اکٹھا کرنے اور ان پر نظر ثانی کرنے کا بیڑا اٹھایا اور ان سب کے نتیجوں کو ایک یکساں اصول میں منسلک کیا۔ یہ اصول اس بات پر مشتمل ہے کہ دی ہوئی مساوات کے حل کو ایک ایسی مساوات کے حل میں تحویل کیا جائے جس کا درجہ دی ہوئی مساوات کے درجہ سے کم ہو اور جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں اور اکائی کے جذروں کے خطی تفاعل ہوں۔ وہ یہ بھی ثابت کرتا ہے کہ پانچ درجی کو اس طرح تحویل نہیں کیا جاسکتا کیونکہ وہ مساوات جس پر اس کا حل منحصر ہوتا ہے چھٹے درجہ کی مساوات ہے۔

اب چونکہ پانچویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے کی تمام کوششیں رایگان گئیں اسلئے علماء ریاضی کے دلوں میں فطرتاً یہ سوال پیدا ہوا کہ آیا اس کا حل ممکن بھی ہے چنانچہ ایبل اور وانڈرل نے ثابت کر دیا (دیکھو سیرٹ کی تصنیف Cours L'Algebre Superieure) کہ چوتھے درجہ سے اعلیٰ تر درجہ کی مساوات کو جس کی شکل پر کوئی قید نہ ہو حل کر لینا ناممکن ہے۔ تاہم ایم۔ ہرمانٹ نے پانچ درجی کا ایک ماورائی حل دیا ہے جس کی شکل (274) میں ناقصی تکملے شامل ہوتے ہیں۔ لگرائج کی تحقیقاتوں کے بعد سے پانچ درجی کی بحث میں جو دوسرے اضافے ہوئے ہیں ان میں سے اہم ایک یہ ہے کہ اسکو سه رومی شکل میں (شرن ہاسن کے) استعمال کی مدد سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ شرن ہاسن خود بھی ۱۶۸۳ء میں  $a = f + q + لا + لا$  کے مفروضہ کی مدد سے کعبی اور چار درجی کو تحویل کرنے میں کامیاب ہوا تھا اور قیاس لگایا تھا کہ اسی قسم کا عمل عام مساوات پر بھی استعمال ہو سکتا ہے۔ پانچ درجی کی تذکرہ بالا سه رومی تحویل کو مسٹر جیرارڈ نے نتیجہاً مکمل ریسرچ ۱۸۳۲ء ۳۵ میں شائع کیا اور ایم۔ ہرمانٹ کا بیان ہے کہ پانچ درجی کی بحث میں یہ تحویل اہم ترین اضافہ



خصوصاً ایسی صورت میں جبکہ ایل نے یہ ثابت کر دیا تھا کہ اسکا حل ناممکن ہے۔ ایک مقالہ میں جس کو رابرٹ ہارلی نے کوارٹری جرنل آف میٹھامیٹکس حصہ ششم صفحہ ۳۸ میں شائع کیا تھا اس بات کو ثابت کیا ہے کہ یہ تحویل پہلے ہی عمل میں آچکی تھی کیونکہ اسکو سویڈن کے ریاضی داں برنگ نے ۱۸۶۷ء میں حاصل کیا تھا۔ ڈاکٹر سلوسٹر کا تھا بھی بہت اہم ہے جس کے ذریعہ سے پانچ درجی کو تین پانچویں درجہ والی برقموں کے مجموعہ کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ یہ ایسی شکل ہے جو پانچ درجی کو استعمال کرنے میں بڑی سہولت پیدا کرتی ہے۔ پانچ یا اس سے زیادہ درجہ والی مساواتوں کی بحث میں جو اور اصناف نے زمانہ حال میں ہوئے ہیں وہ زیادہ تر ان اشکال کے ہم متغیروں اور غیر متغیروں سے متعلق ہیں۔ ان تحقیقاتوں کا کچھ ذکر اس تصنیف کی دوسری جلد میں ہے لیکن اور زیادہ تحقیق سے کام لینا ہے تو طالب علم کو Clebsch کی "Theorie der binaren algebraischen" اور سامن کی "Lessour Introductory to the Modern Higher Algebra" کا مطالعہ کرنا چاہیئے۔



## نوٹ (ب)

(275)

## عددی مساواتوں کا حل

عددی مساواتوں کی اصولوں کو تقریبی طور پر معلوم کریشکی پہلی سعی جو کیگئی اسکو ویٹا نے ۱۶۰۰ء میں شائع کیا۔ اس سے پہلے کارڈن نے کبھی پر ”محل باطل“ (حیکو وہ *regula aurea* کہتا ہے) کا قانون جاری کیا تھا مگر اس طریقہ سے جو نتیجے حاصل ہوئے انکی کوئی قدر و قیمت نہیں۔ ویٹا کو خیال ہوا کہ دی ہوئی مساوات کی کسی خاص عددی اصل کو ایسے طریقہ سے حاصل کرنا ممکن ہے جو جذر المربع اور جذر اللعب نکالنے کے معمولی اعمال کے مشابہ ہے۔ پھر اسکے دل میں یہ سوال پیدا ہوا کہ ان معلومہ عملوں میں کس قسم کی تقسیم ہونی چاہئے کہ ان کی مدد سے مساوات کی اصل حاصل ہو سکے جبکہ مساوات کے سر دیئے ہوئے اعداد ہوں۔ مساوات  $F(x) = 0$  لیگر جہاں  $F$  دیا ہوا عدد ہے اور  $F(x)$  ایک کثیرالارقام ہے جس میں  $x$  کی مختلف قوتیں شامل ہیں ویٹا نے یہ ثابت کیا کہ  $F(x)$  میں اصل کی معلومہ تقریبی قیمت درج کرنے سے اصل کا دوسرا ہندسہ (جو کسرا عشریہ میں بیان کیا گیا ہو) عمل تقسیم سے حاصل ہو سکتا ہے۔ جب یہ قیمت حاصل ہو جائے تو اس عمل کو دہرانے سے اصل کا ایک اور ہندسہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ وٹس علیٰ ہذا یہ یہ امر غور طلب ہے کہ اس طریقہ کا اصول اس خاص اصول کے حامل ہے جو نیوٹن اور ہارنر کے تقرب کے طریقوں میں مضمر ہے۔ (دیکھو صفحات



۱۰۸۷-۱۰۸۸)۔ ویٹا کے بعد سے جو کچھ اس طریقہ میں اضافہ ہوا ہے وہ صرف عمل حساب کو اس طور پر ترتیب دینا ہے کہ اصل کے معلوم کرنے میں صحت اور آسانی پیدا ہو جائے ورنہ اصولاً کوئی اختلاف نہیں ہے۔ اس باب میں کس قدر بڑی ترقی ہوئی ہے اس کا اندازہ مانٹو کلا (Montucla) کے بیان سے بخوبی ہو سکتا ہے جو اس کی تصنیف

تاریخ ریاضیات (Histoire des Math.) جلد اول صفحہ ۶۰۳ میں درج ہے۔ ویٹا کے طریقہ تقرب پر بحث کرتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ چار درجہ کی اصل کو اعشاریہ کے گیارہ مقامات تک معلوم کرنے کا عمل حساب (جسکو ویالس (Wallis) نے پورا کیا) از حد صبر آزما کام ہے۔ لیکن اب وہی عمل حساب بہت آسانی کے ساتھ ہر وہ شخص کر سکتا ہے جس نے ہارنر کے طریقہ میں مہارت حاصل کی ہو۔

نیوٹن کا تقرب کا طریقہ ۱۶۶۹ء میں شائع ہوا لیکن اس کے قبل ویٹا کا طریقہ استعمال کیا جاتا تھا جسکو ہپاریو، آٹریڈ، پیل اور دوسروں نے کچھ آسان بنا دیا تھا۔ نیوٹن کے بعد شیمپسن اور برنولی نے خود کو اس مسئلہ کی طرف متوجہ کیا۔ چنانچہ اسکا نتیجہ یہ ہوا کہ ڈینیئل برنولی مساوات کی اصل کو متوالی سلسلہ کی شکل میں بیان کرنے میں کامیاب ہوا اور یولر نے بھی اصل کے لئے اسی قسم کا جملہ حاصل کیا۔ لیکن یہ دونوں طریقے لگراج کے بیان کی بموجب کسی طرح بھی نیوٹن کے حل سے اصولاً مختلف نہیں ہیں۔

پس لگراج کے زمانہ تک عددی مساوات کی اصل کو تقریبی طور پر حاصل کرنے کا صرف ایک طریقہ تھا اور یہ طریقہ جسکو بالآخر ہارنر نے مکمل کیا اب تک بہترین طریقہ چلا آتا ہے۔

لگراج نے کتاب محلولہ بالا میں نیوٹن اور ویٹا کے طریقوں کے تقاض کو واضح کیا ہے۔ ویٹا کے طریقہ کا حوالہ دیتے ہوئے وہ کہتا ہے کہ اس میں بہت سی آزمائشوں کا سامنا کرنا پڑتا ہے اور



اس پر اعتماد نہیں کیا جاسکتا جب تک کہ مساوات  $f(x) = 0$  کی دائیں جانب کی تمام رقمیں مثبت نہ ہوں۔ نیوٹن کے طریقہ میں وہ یہ تقاضا بتاتا ہے:۔ اول، اس سے متوافق اصل محدود رقموں میں حاصل ہو نہیں سکتی۔ دوم، عمل میں یہ خوف کہ کہیں ہرئی تصحیح درست ہے یا نہیں۔ بالآخر، اس مساوات کی صورت میں اس طریقہ کی ناکامی جسکی اصلیں تقریباً مساوی ہوں۔

لگرانج نے جس مسئلہ کو اپنے لئے پیش کیا وہ یہ تھا:۔  
 ”اگر ایک عددی مساوات دی گئی ہو جس کی اصلوں کی نوعیت اور قیمتوں کے متعلق پہلے سے کچھ بھی معلوم نہیں ہے تو ان اصلوں کی ممکن ہو تو ٹھیک ٹھیک قیمت دریافت کرنا یا ہر اصل کی تقریبی قیمت تقرب کے مطلوبہ درجہ تک معلوم کرنا۔“

اس مسئلہ کو اس نے حل کرنے کی جو کوشش کی ہے اسکا ذکر کرنے سے پیشتر یہ دیکھنا ضروری ہے کہ متذکرہ بالا تقرب کے طریقوں کے علاوہ اس سمت میں کونسی باتیں معلوم ہو چکی تھیں۔ ہیریٹ نے ۱۶۳۱ء میں مساوات کی ترکیب کو اجزاء و ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں معلوم کیا تھا اور وہ روابط دریافت کر لئے تھے جو اصلوں اور سروں کے درمیان ہیں۔ ویٹا نے بھی کی صورت میں ان روابط کو اس سے پہلے معلوم کیا تھا لیکن وہ عام صورت میں کوئی ایسا نتیجہ اخذ نہ کر سکا جیسا کہ ہیریٹ نے حاصل کیا۔ یہ انکشاف اہم تھا کیونکہ اس سے اس بات کا پتہ چلا کہ صحیح اصل کو مساوات کی متعلق رقم کا جز و ضربی ہونا چاہئے اور ایسی اصلوں کو متعین کرنے کے لئے نیوٹن کا مقسوم علیہم کا طریقہ اسکا لازمی نتیجہ صریح تھا۔ پس اصلوں کے حدود معلوم کرنے کی طرف علماء و ریاضی کی توجہ منعطف ہوئی تاکہ مقسوم علیہم کے طریقہ اور تقرب کے دوسرے موجودہ طریقوں میں جو محنت کرنی پڑتی تھی وہ کم ہو جائے جیسا کہ پہلے بیان کر دیا گیا ہے ویکارٹ پہلا



تخص تھا جس نے مساواتوں کی منفی اور خیالی اصلوں کو پہچانتے کے لئے ایک معیار دریافت کیا۔ نیز کسی دی ہوئی مساوات کی حقیقی اور خیالی اصلوں کی تعداد متعین کرنے کے متعلق جس تحقیق کی اس نے ابتدا کی اسکو اسٹرلنگ دی گوا، اور دوسرے علماء نے جاری رکھا۔

لگرنج نے غور کیا کہ متذکرہ صدر مسئلہ کو حل کرنے میں سب سے پہلے دی ہوئی مساوات کی حقیقی اصلوں کی تعداد متعین کرنا اور انکو ایک دوسرے سے جدا کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے لئے اس نے اس مساوات کا استعمال کرنا تجویز کیا جس کی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے فرقوں کے مربع ہوں۔ ویرنگ نے اس سے پہلے ہی اصلوں کو جدا کرنے کا یہ طریقہ ظاہر کیا تھا لیکن لگرنج کا بیان ہے [عددی مساواتیں نوٹ سوم] کہ حیوقت وہ اس مضمون پر اپنی یادداشت لکھ رہا تھا وہ ویرنگ کی تحقیقاتوں سے تاواقف تھا اب یہ ظاہر ہے کہ جب فرقوں کی مساوات بنجاتی ہے تو اسکی مثبت اصلوں کی سفلی حد معلوم کر کے وہ عدد معلوم کرنا ممکن ہے جو دی ہوئی مساوات کی اصلوں کے فرقوں میں سے سب سے چھوٹے فرق سے کم ہو۔ پھر علی التواتر ان عددوں کو درج کرنے سے جو اس مقدار سے تھوڑا فرق رکھیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کو جدا کیا جاسکتا ہے۔ جب اس طور پر اصلیں جدا ہو جائیں تو لگرنج کی تجویز ہے کہ انہیں سے ہر ایک کو مسلسل کسور کے طریقہ سے جس کی تشریح اس کتاب میں (صفحہ ۱۱۲) کر دی گئی ہے معلوم کیا جائے۔ اصلوں کو معلوم کر نیکایہ طریقہ اس اعتراض سے بچ جاتا ہے جو نیوٹن کے متذکرہ بالا طریقہ پر وارد ہوتا تھا چنانچہ اس طریقہ سے ہر تقریب میں خطا کی مقدار معلوم ہوتی ہے اور جب اصل متوافق ہو تو عمل خود بخود رک جاتا ہے اور اصل محدود شکل میں معلوم ہوتی ہے۔ لگرنج نے مساواتوں کی خیالی اصلوں کو حاصل کرنے کے طریقے بھی دے دیے ہیں اور یہ بھی بتایا ہے کہ اگر مساوات میں



مساوی اصلیں ہوں تو انکو سب سے پہلے موجودہ طریقوں سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

نظری طور پر لگرائج نے اپنے لئے جو مسئلہ تجویز کیا تھا اس کا حل متذکرہ بالا تحریر کی رو سے مکمل ہے۔ لیکن عملی طور پر جہاں تک اسکا تعلق ہے وہ محض بیکار ہے۔ کیونکہ جو تھے درجہ کی مساوات کے لئے ہی فرقوں کی مساوات بنانا بہت محنت طلب ہے اور اعلیٰ تر درجہ کی مساواتوں کے لئے قریب قریب ناممکن العمل۔ اگر ہم اصلوں کو جدا کر نیکے وہ آسان ترین طریقے بھی لگرائج کے یقیہ عمل کے ساتھ کام لائیں جو لگرائج کے بعد معلوم کئے گئے ہیں تو بھی اس عمل پر یہ اعتراض وارد ہوتا ہے کہ اس سے اصل مسلسل کسر کی شکل میں حاصل ہوتی ہے اور اسکو اس شکل میں حاصل کرنے کے لئے جو محنت درکار ہے وہ اس محنت سے کہیں زیادہ ہے جو اصل کو اعشاری شکل میں حاصل کر نیکے لئے ہارنر کے عمل میں کرنی پڑتی ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ یہ آخر الذکر عمل اس مکمل شکل میں جسکو ہارنر نے پیش کیا ہے ان تمام اعتراضات سے بری ہے جو نیوٹن کے طریقہ پر وارد ہوتے ہیں۔

لگرائج کے بعد ویٹیا اور نیوٹن کے تقرب کے طریقوں میں ہارنر کی ترمیم کے علاوہ عددی مساواتوں کی تحلیل میں فوریر، بوڈان اور اسٹرم نے نہایت اہم اضافے کئے ہیں۔ بوڈان کی تحقیقات ۱۸۰۷ء میں شائع ہوئی اور فوریر کی اسکے انتقال کے بعد ۱۸۳۱ء میں اس میں شک نہیں کہ بوڈان کی تصنیف سے پہلے ہی فوریر نے وہ مسئلہ معلوم کر لیا تھا جو اس کتاب میں ایک ساتھ دونوں کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔ اسٹرم کی تحقیقات ۱۸۳۵ء میں شائع ہوئی۔ ان مصنفین نے اصلوں کو جدا کر نیکے جو طریقے بیان کئے ہیں انکو پوری طرح اس کتاب میں واضح کیا گیا ہے (دسواں باب)۔ ان طریقوں کو ہارنر کے طریقہ کے ساتھ شامل کرنے سے ہمیں لگرائج کے مسئلہ کا وہ حل ملجاتا ہے جو خود لگرائج کے



مجوزہ حل سے کہیں زیادہ آسان ہے۔ نیز اس سمت میں اس سے زیادہ سہولت پیدا کرنا ناممکن نظر آتا ہے۔ مساوات کی اصل دریافت کریمتیں محنت سے بچنا اسی طرح محال ہے جس طرح جذر المربع یا جذر اللعب نکالنے کے عمل میں۔ یہ اور بات ہے کہ ہر ترکہ عمل اس محنت کو حتی الامکان گھٹا دیتا ہے۔ اصولوں کو جدا کرنے میں بھی خصوصاً ہر وقت جبکہ دو یا زیادہ اصلیں تقریباً مساوی ہوں کم یا زیادہ محنت کرنا پڑے گی۔ اس محنت میں کچھ تخفیف ہو سکتی ہے اگر سروں کے تقاعلوں پر جو مساواتوں کے نظریہ میں اس قدر اہم حصہ لیتے ہیں کافی غور کر لیا جائے۔ مثلاً اگر تقاعلوں 'ع' اور 'جے' کو دئے ہوئے چار درجہ کیلئے محسوب کر لیا جائے تو اصول کی نوعیت کا فوراً معلوم کر لینا ممکن ہے (دیکھو دفعہ ۶۸)۔ ممکن ہے کہ آئندہ کسی زمانہ میں علماء ریاضی اصولوں کو جدا کر نیکاً کوئی آسان طریقہ ایجاد کر سکیں جس طرح فی زمانہ سادہ اصولوں کو نو کار نم کے ذریعہ محسوب کیا جاسکتا ہے لیکن فی الحال لکراج کے مسئلہ کا مکمل ترین حل وہی ہے جو اسٹرم اور ہارنر کے طریقوں کو ملانے سے پیدا ہوتا ہے۔

اوپر جو کچھ بیان کیا گیا وہ صرف عددی مساواتوں کی حقیقی اصولوں کا صادق آتا ہے۔ ہم نے صفحہ ۳۹۵ کے حاشیہ میں ان کتابوں کا حوالہ دیدیا ہے جنہیں خیالی اور ملتفت اصولوں کو محسوب کرنے کے عام طریقے دریافت کرنے کی کوششیں کیں ہیں اور دفعات ۱۲۴ اور ۱۲۵ میں یہ بتا دیا ہے کہ تیسرے اور چوتھے درجہ کی عددی مساواتوں کی صورت میں ان اصولوں کو آسان ترین طریقہ سے کس طرح محسوب کیا جاسکتا ہے۔



## نوٹ (ج)

(279)

اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے

دفعات ۱۲۲ اور ۱۲۳ میں جو مسئلہ زیر بحث رہا ہے اس کے

سلسلہ میں یہ ضروری ہے کہ جو کچھ ثابت ہوا وہ واضح طور پر ذہن میں رہے اور جو ثابت ہونا ممکن ہے اسکو اچھی طرح ذہن نشین کیا جائے۔  
اگر مساوات

$$1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

میں سروں ۱، ۱، ۱، ...، ۱ کو صرف جبری علامات کی طرح بغیر کسی قید کے استعمال کیا جائے یعنی اگر یہ سر کسی قسم کی قید کی پابندی نہ کریں جو حقیقی اعداد یا بارہوں میں باب میں بحث کردہ ملحق اعداد ہونے سے متعلق ہو تو ایسی مساوات کی صورت میں یہ ثابت نہیں ہوا ہے اور نہ اسکا ثبوت موجود ہے کہ ہر مساوات میں ایک اصل ہوتی ہے۔ وہ مسئلہ جو ثبوت پذیر ہے یہ ہے کہ  $n$  ویں درجہ کی کسی منطوق صحیح مساوات کی صورت میں جس کے سر سب کے سب ملحق (شامل حقیقی) اعداد ہیں  $n$  ملحق اعداد موجود ہوتے ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتے ہیں۔ چنانچہ اصطلاحات عدد اور عددی کو بارہوں یا کے وسیع معنوں میں استعمال کرنے سے زیر بحث مسئلہ کو زیادہ صحت کے ساتھ اس شکل میں بیان کیا جاسکتا ہے:-



ن ویں درجہ کی ہر عددی مساوات میں  $n$  عددی اصلیں ہوتی ہیں۔ جہاں تک اس مسئلہ کا تعلق ہے اس میں کوئی شبہ نظر نہیں آتا کہ بالکل سیدھا اور باقاعدہ ثبوت وہ ہے جو خیالی جملوں یا بارہویں باب میں بحث میں آئے ہوئے ملحق عددوں کو استعمال کرنے پر منحصر ہے۔ ملحق عددوں کو مستوی کے نقطوں کے ذریعہ تعبیر کر نیک خیال سب سے پہلے آرگنڈ کے ذہن میں آیا تھا جس نے ۱۸۰۶ء میں بغیر اپنا نام ظاہر کئے ایک تصنیف شائع کی جو

*Essai sur une maniere de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.*

کے نام سے موسوم ہے اس مصنف نے چند سال بعد جرجان کی "Annales" میں اپنی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ انہیں شک نہیں کہ آرگنڈ نے اپنے نئے طریقوں کی شہیر میں بہت کچھ کوشش کی لیکن ان پر بہت کم توجہ کی گئی اور ایک مدت کے بعد انہی طریقوں کو انگلستان میں وارن نے اور فرانس میں مورے نے بلا واسطہ دریافت کیا۔ ان معلومات کا گاؤس نے اپنی کتابوں میں جو ۱۸۳۱ء میں شائع ہوئیں اضافہ کیا اور کوشی نے ان طریقوں کو دفعہ ۱۲۱ کے اہم مسئلہ کے ثبوت میں استعمال کیا۔ اس مسئلہ کے سلسلہ میں جواب زیر بحث ہے اسکا وہ ثبوت جو ہم نے دفعہ ۱۲۳ میں دیا ہے فی الحقیقت اس ثبوت کی ترسیم ہے جو آرگنڈ کے اصلی مقالہ میں پایا جاتا ہے اور جس کو کوشی نے اپنی کتاب *Exercices d'Analyse* میں دہرایا ہے۔ ایک ثبوت جو بہت سی باتوں کا لحاظ کرتے متذکرہ بالا ثبوت کے مشابہ ہے مرتے نے بھی دیا ہے۔

ملحق عددوں کی ہندسی تعبیر دریافت ہونے سے پیشتر مختلف علماء ریاضی مساواتوں کی اصلوں کی نوعیت کا مسئلہ حل کرنے میں مصروف رہے۔ لگرائج نے اپنی کتاب "عددی مساواتوں" توٹ ہنم میں ان کی تحقیقاتوں کا ذکر کیا ہے۔ ان محققین کی فہرست میں ڈابنرٹ، ویکارٹ، یولر، فونسنیکس اور لاپلاس شامل ہیں جنکی توجہ صرف ایسی مساواتوں پر



مرکوز رہی ہے جن کے سر منطبق تھے اور انکے پیش نظریہ مقصد تھا کہ اجزائے ضربی لا۔ عہ، لا۔ بہ، وغیرہ کے وجود کو تسلیم کر کے یہ بتایا جائے کہ اصلیں سب کی سب یا تو حقیقی ہیں یا  $1 + b - a$  کے نمونہ کی خیالی مقداریں۔ یہ الفاظ دیگر حقیقی عددی سروں والی مساوات میں خیالی اصل کی کوئی اور شکل سوائے  $1 + b - a$  کے نہیں ہو سکتی جس میں  $a$  اور  $b$  حقیقی مقداریں ہیں۔ اس مسئلہ کے ثبوت کے لئے عام طور پر جو طریقہ رائج تھا وہ یہ ثابت کر نیکیے لئے تھا کہ اس مساوات کی صورت میں جبکہ درجہ میں  $2$  کسی قوت  $k$  میں شامل ہوتا ہے اس کے دو درجہ جزو ضربی کے وجود کا امکان ایسی مساوات کے حل پر منحصر کیا جاسکتا ہے جس کے درجہ میں  $2$  صرف قوت  $k$  میں شامل ہو اور اس عمل سے مسئلہ کو تبدیل کر کے اسکو اس معلومہ اصول پر منحصر کر دیا جائے جو یہ ہے کہ طاق درجہ کی ہر مساوات جس کے سر حقیقی ہیں ایک اصل رکھتی ہے۔ اس مضمون پر لگ رائج نے جو تحقیقاتیں کی ہیں متذکرہ بالا کتاب میں درج ہیں۔ انکا تعلق صرف ایسی مساواتوں سے ہے جنکے سر حقیقی ہوں۔ اور یہ بالآخر ایسی اصول پر آکر ٹکتی ہیں جو اوپر مذکور ہو یعنی حقیقی سروں کے ساتھ طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل موجود ہوتی ہے۔

اسی اصول (یعنی طاق درجہ کی مساوات میں ایک حقیقی اصل کا وجود) پر منحصر کر کے اس مسئلہ کو حل کر نیکیے دو طریقے حال ہی میں شائع ہوئے ہیں۔ ایک وہ ہے جو پروفیسر کلفرڈ کا ہے (دیکھو اسکے تھیماسٹک بیسیز صفحہ ۲۰ اور کیمبرج کی فلاسوفیکل سوسائٹی کی رونا دجلہ دوم ۱۸۷۸ء اور دوسرے طریقہ میاٹ کا ہے دیکھو "Translations of the Royal Irish Academy" ۲۶ ویں جلد صفحہ ۲۵۳ ۱۸۷۸ء میں درج کی مساوات سے ابتدا کر کے دونوں مصنف سلوٹر کا اسقاط کا طریقہ استعمال کرتے ہیں تاکہ  $m(2 - 1)$  ویں درجہ کی مساوات حاصل ہو جائے جس کے حل پر مجوزہ مساوات کی ایک اصل کے وجود کا منحصر ہونا ثابت کیا جاتا ہے اور چونکہ عدد  $m(2 - 1)$  میں جزو ضربی  $2$ ، عدد  $2m$  کی بہ نسبت ایک



مرتبہ کم شامل ہوتا ہے یہ مسئلہ بالآخر مسئلہ کردہ بالا طریقوں کی طرح طاق درجہ کی مساوات میں ایک اصل کے وجود کے اصول پر منحصر ہو جاتا ہے۔ وہ دو مساواتیں جن کے درمیان عمل استقاط جاری ہوتا ہے م دیں اور (م-۱) دیں درجہ کی ہیں اور ان طریقوں کے طرز ثبوت کے درمیان جو فرق ہے وہ صرف ان مساواتوں کو حاصل کرنے کے طرز کے لحاظ سے ہے۔ میالٹ کے طریقہ میں ان مساواتوں کو مجوزہ مساوات کے سادہ استحالیہ کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے اور یہ وئیسر کلفرڈ ایک حقیقی دودجی جزو ضروری سے دئے ہوئے کثیر الارقام کو تقسیم کر کے جو باقی رہتا ہے اسکے بیروں کو وئیسر کے مساوی رکھ کر ان کو حاصل کرتا ہے۔ ان سروں کی عام شطیئیں اس کتاب کی دوسری جلد میں مقطعات کے باب کے آخر کی تنفسرق مثالوں میں ملیںگی اور وہاں یہ بات آسانی سے معلوم ہوگی کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتوں سے بہ کو ساقط کرنے سے عہ میں ایک مساوات ملتی ہے جسکا درجہ م (۲-م-۱) ہے۔ (دیکھو مثال ۳۸ صفحہ ۱۰۱ جلد دوم)۔

تمت



۷۸۶

# اشاریہ

## مساواتوں کا نظریہ

### جلد اول

نوٹ :- اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے -

اخراج ، رقموں کا ' ۹۴

آرگنڈ ، ۴۲۲

استحالہ ، مساواتوں کا ' ۸۴

کعبی کا ' ۱۰۱

چار درجہ کا ' ۱۰۳

ہم رسم ' ۱۰۶

متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ ' ۱۰۸

بالعموم ' ۱۱۴

اسٹرم ، اسکامسئلہ ' ۲۹۷

مساوی اصولوں کیلئے ' ۳۰۷

اسکے مسئلہ کا اطلاق ' ۳۱۱

اسکے مسئلہ پر مثالیں ' ۳۲۲ ، ۳۲۳ ، ۳۷۵



- اصلیں، متعلقہ مسائل، ۲۴  
 خیالی، ۲۷  
 تعداد، ۲۸  
 مساوی، ۳۲  
 ڈیکارٹ کا قاعدہ مثبت اصولوں کے لئے، ۳۶  
 منفی اور خیالی اصولوں کے لئے، ۳۸  
 سروں کے ساتھ رشتہ، ۳۵  
 اکائی کے جذور الکعب، ۵۸  
 انکے متشاكل تفاعل، ۶۳، ۲۴۵  
 ضعیفی، ۲۳۵، ۳۳۶  
 انکی انتہائیں، ۲۶۹  
 انکو جدا کرنا، ۲۸۳  
 متوافق، ۳۲۷  
 انکا تقرب، ۳۴۱، ۳۴۳  
 انپیرکوشی کا مسئلہ، ۳۸۹  
 ملحق اصلیں معلوم کرنا، ۳۹۴  
 مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۳۹۲، ۴۲۱  
 اعداد، ملحق، ۲۸، ۳۷۷  
 اعظم اور اقل قیمتیں، ۲۳، ۲۳۰  
 انتہائیں، اصولوں کی، تعریفات، ۲۶۹  
 انپیرسٹبل، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۶  
 سفلی انتہائیں اور منفی اصولوں کی انتہائیں، ۲۷۹  
 انتہائی مساواتیں، ۲۷۹  
 برنگ، ۴۱۴  
 بن موسیٰ، ۴۰۹



بنیادی مسئلہ، ۳۹۱  
کوشی کے مسئلہ سے ماخوذ، ۳۹۲

دوسرا ثبوت، ۳۹۲

تاریخی نوٹ، ۴۲۱

بودان کا مسئلہ، ۲۸۴

بومبلی، ۴۱۱

پانچ درجی، اسکی خاص شکل کا حل، ۱۵۳

اسٹرم کے باقی جبکہ دوسری رقم موجود نہ ہو، ۳۷۴، ۳۷۵

اسکے حل کا عدم امکان، ۴۱۲

پیر سر، اسٹرم کے تفاعلوں پر، ۳۲۵

نرسیمی تعبیر

کثیر رشتہ کی، ۱۸

مشتق تفاعلوں کی، ۲۲۹

ملقف اعداد کی، ۳۷۷

تفاعلوں کی جدول، ۱۶

تقرب، عددی اصلوں کا:

نیوٹن کا طریقہ، ۳۴۱

ہارنر کا طریقہ، ۳۴۳

لگرنج کا طریقہ، ۳۶۵

ٹارٹاگلیا، ۴۱۰

ثنائی سر، ۹۶

ثنائی مساواتیں، حل، ۱۳۰

خواص، ۱۳۴

حل، دائری تفاعلوں کے ذریعہ، ۱۴۳

حل، گاس کے طریقہ سے، ۱۴۹



جبری مساواتیں، ۲، ۳۲۶

انکامل، ۱۵۵

کعبی کا حل، ۱۵۹

چار درجہ کا حل، ۱۷۷

تاریخی نوٹ، ۴۰۹

جذر الکعب، اکائی کے، ۵۸

چار درجہ، ۱۰۳

یولر کا حل، ۱۷۷

فیراری کا، ۱۹۰

ڈیکارٹ کا، ۱۹۶

متکافی شکل میں استحالة، ۱۹۹

متشاکل تفاعلوں کے ذریعہ حل، ۲۰۴

اصولوں کی نوعیت، ۲۱۲، ۳۱۹

حقیقی اصلیں، کعبی کی، ۱۲۰

چار درجہ کی، ۲۱۳

عام صورت میں، ۳۱۷

خارج قسمت اور باقی، جبکہ کثیرالارقام کو ثنائی جملہ سے تقسیم کیا جائے

خاص اصلیں، ثنائی مساواتوں کی، ۱۳۸

خیالی اصلیں، ۲۷

زوج زوج داخل ہوتی ہیں، ۳۳

کعبی کی، ۳۹۴

چار درجہ کی، ۳۹۹، ۴۰۳

خیام، ۴۰۹

ڈارون، جی۔ ایچ، مثال حل شدہ، ۳۷۲

ڈیکارٹ، قانون علامت، ۳۶، ۳۸



- ڈیکارٹ، چار درجی کا حل، ۱۹۶  
 اضافے جبر و مقابلہ میں، ۴۱۱  
 ڈی گوا، خیالی اصولوں کے لئے قاعدہ، ۲۹۶  
 رابرٹس، دو تعبیروں سے ماخوذ مساوات پر، ۱۷۳  
 چار درجی کی مربع دار فرقوں کی مساوات پر، ۲۱۱  
 تھامس ریلے، ۲۲۷  
 چار درجی اور پانچ درجی پر مثال، ۳۲۳  
 رتبہ، متشاکل تفاعلوں کا، ۲۵۷  
 رول کا مسئلہ، ۲۳۳  
 سامن، ۴۱۴  
 سوت، ملحق عدد کی، ۳۷۸  
 اسکاٹس، ۳۸۶  
 سمن، ۴۱۱  
 سیپوفیرو، ۴۰۹  
 سیرٹ، ۴۱۳  
 ضعیفی اصلیں، ۳۲۲، ۲۳۵، ۲۳۶  
 انکی تعین، مقسوم علیہم کے طریقہ سے، ۳۳۶  
 عددی مساواتیں، ۳۲۶، ۳  
 انکی متوافق اصلیں، ۳۲۷  
 انکی ضعیفی اصلیں، ۲۳۶، ۳۳۶  
 اصولوں کے تقرب کے طریقے، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۶۵  
 انجے حل پر نوٹ، ۴۱۵  
 بنیادی مسئلہ پر نوٹ، اصولوں سے متعلق، ۴۲۱  
 عرب، ۴۰۹  
 فلا ریڈو، ۴۱۰



- فوریہ، اسکا مسئلہ، ۲۸۳، ۴۱۹  
 خیالی اصلوں پر اطلاق، ۲۹۲  
 نتائج صریح، ۲۹۶  
 فیصلہ، چار درجہ کا حل، ۱۹، ۴۱۱  
 قاعدہ، ڈیکارٹ کا، علامتوں کا، ۳۶، ۲۹۷  
 ڈی گوا کا، ۲۹۶  
 دہری علامت کا، ۲۹۷  
 کارڈن، کعبی کا حل، ۱۵۹  
 مارٹا گلیا سے اسکے تعلقات، ۴۱۰  
 کثیرالارتقام، عام خواص، ۷، ۹  
 انکی شکل میں تبدیلی، ۱۰  
 انکا تسلسل، ۱۳  
 انکی تریسمی تغیر، ۱۸  
 اعظم اور اقل قیمتیں، ۲۳  
 کعبی، ۱۰۱  
 فرقوں کی مساوات، ۱۱۶  
 اصلوں کی نوعیت کی جانچ، ۱۱۹  
 کارڈن کا حل، ۱۵۹  
 دو مکعبوں کے فرق کے طور پر، ۱۶۲  
 متشاکل تفاضلوں کے ذریعہ حل، ۱۶۴  
 اصلوں کا ہم رسم رشتہ، ۱۷۶  
 کلفروڈ، اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۴۲۳  
 کوشی، اسکا مسئلہ، ۳۸۹  
 کولا، ۴۱۰، ۴۱۱  
 گاس، شنائی مساواتیں، ۱۴۹



- گرٹھیڈ، چاردرجی پر، ۲۰۱  
 لگرنج، فرقوں کی مساوات، ۲۰۹  
 اصولوں کے تقرب کے لئے اسکا کسر مسلسل کا طریقہ، ۳۶۵  
 مساواتوں کے حل پر، ۴۱۳  
 اسکا مقالہ "عددی مساواتوں پر" ۲۰۹، ۴۱۶، ۴۲۲  
 لوکس ڈی برگو، ۴۰۹  
 لیونارڈو، ۴۰۹  
 متجانش حاصل ضرب، ۲۶۵  
 متشکل تفاعل، تعریفات، ۶۳  
 متعلقہ مسائل، ۷۳  
 انکے ذریعہ استحالة، ۱۰۸  
 سروں کی رقوم میں، ۲۴۸  
 انکار تہ اور وزن، ۷۳، ۲۵۶  
 انکو محسوب کرنا، ۶۵، ۲۵۹  
 متغیر، اسکی تبدیلی سے کثیرالارتقام کی شکل میں تبدیلی، ۱۰  
 ملٹف، ۳۸۲  
 متکافی اصلیں اور متکافی مساواتیں، ۸۸  
 متکافی مساواتوں کا حل، ۱۳۰  
 چاردرجی کا استحالة متکافی شکل میں، ۱۹۹  
 متوافق اصلیں، ۳۲۷  
 مجموعے، اصولوں کی قوتوں کے:  
 نیوٹن کا مسئلہ، ۲۴۵  
 سروں کی رقوم میں، ۲۵۱  
 سروں کو انکی رقوم میں بیان کرنا، ۲۵۲  
 محول کعبی، ۱۷۹



مساوات، مربع دار فرقوں کی:

کعبی کی، ۱۱۶

عام مساوات کی، ۱۲۱

چار درجہ کی، ۲۰۹

مساوات جسکی اصلیں دی ہوئی مساوات کی اصلوں کی قوتیں ہوں، ۱۱۰

مساوی اصلیں، ۳۲

شرط، کعبی کی صورت میں، ۱۲۰

چار درجہ کی صورت میں، ۲۱۲

تعیین، ۲۳۶

مقسوم علیہم کے طریقہ سے، ۳۱۲

مشق تفاعل، ۱۰

ترسیمی تعبیر، ۲۲۹

اصلوں کی رقوم میں، ۲۳۳

مقسوم علیہم، نیوٹن کا طریقہ، ۳۲۸

مقیاس، ملحق عددوں کا، ۳۷۸

ملحق اصلیں، عددی مساواتوں کی، ۳۹۴

کعبی کی، ۳۹۵، ۳۹۶

چار درجہ کی، ۳۹۹، ۴۰۰

ملحق عدد، ۲۸، ۳۷۷

ترسیمی تعبیر، ۳۷۷

جمع اور تفریق، ۳۷۹

ضرب اور تقسیم، ۳۸۱

دیگر اعمال، ۳۸۲

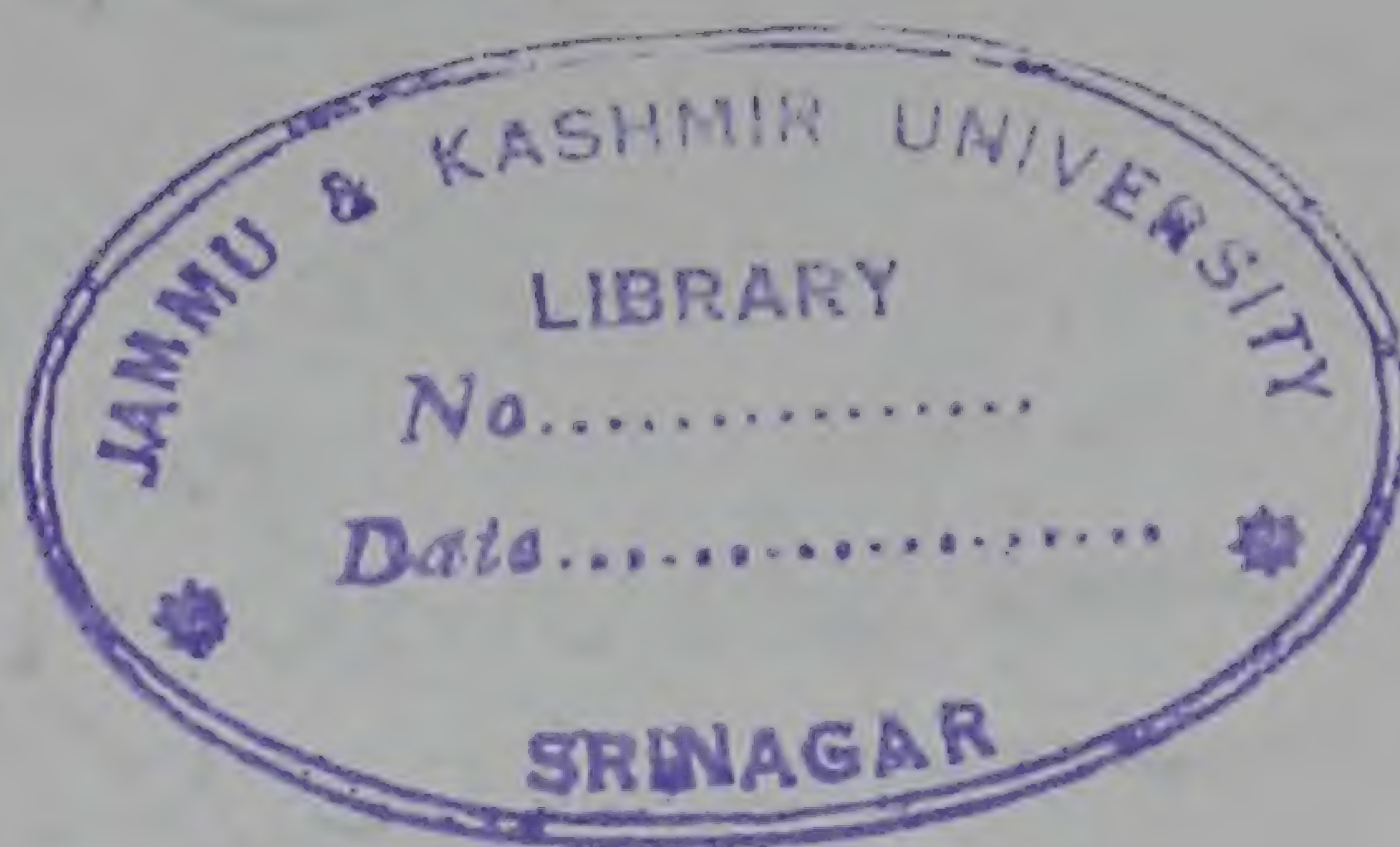
ملحق متغیر، ۳۸۲

تفاعل کا تسلسل، ۳۸۵



منطق صحیح تفاعل کا تسلسل، ۱۳  
 میاں لٹ، اس مسئلہ پر کہ ہر مساوات کی ایک اصل ہوتی ہے، ۴۴۳  
 نیوٹن، اصولوں کی قوتوں کے مجموعوں پر اس کا مسئلہ ۲۴۵  
 انتہائیں معلوم کرنا، ۲۷۶، ۲۹۷  
 مقسوم علیہم کا طریقہ، ۳۲۸  
 تقرب کا طریقہ، ۳۳۱  
 وانڈرمانڈ، ۴۱۲  
 وانڈرل، ۴۱۳  
 وزن، متشاکل تفاعلوں کا، ۷۳، ۲۵۶  
 ویٹا، ۴۱۵  
 یولر، چار درجہ کا حل، ۱۷۷  
 اس کا محول کعبی، ۱۷۹  
 اس کے کعبی کے لئے اسٹرم کے تفاعلات، ۳۷۶  
 اس کی الجبرا کی اشاعت، ۴۱۱  
 ہارلی، ۴۱۴  
 ہارنر، عددی مساواتوں کو حل کرنے کا طریقہ، ۴۴۳  
 عمل کا اختصار، ۳۵۴  
 تقریباً مساوی اصولوں کی صورت میں اسکے طریقہ کا استعمال، ۳۵۹  
 عددی مساواتوں کے حل میں اس کے اضافے، ۴۱۹  
 ہرمائیٹ، ۴۱۳  
 ہم رسم استعمال، ۱۰۶  
 کعبی کی اصولوں کا رشتہ، ۱۷۶







# اصطلاحات

## مساواتوں کا نظریہ

### جلد اول

|                                 |                          |
|---------------------------------|--------------------------|
| Absolute term                   | رقم مطلق                 |
| Ambiguous sign                  | بہم علامت                |
| Amplitude                       | سعت                      |
| Binomial                        | ثنائی، دورمی             |
| Biquadratic                     | چار درجہ                 |
| Circular functions              | دائری تفاعل              |
| Commensurable roots             | متوافق اصلیں             |
| Complex number                  | ملق عدد                  |
| Complex variable                | ملق متغیر                |
| Covariant                       | ہم متغیر                 |
| Derived function                | شتق تفاعل                |
| Dialytic                        | بین تحلیلی               |
| Equation of squared differences | مربع دار فرقوں کی مساوات |
| False position                  | باطل محل، کاذب محل       |
| Fundamental Equation            | بنیادی مساوات            |



Homogeneous products

متجانس حاصل ضرب

Homographic transformation

ہم رسم استحالہ

Incommensurable roots

متجانس اصلیں

Inferior limit

سفلی انتہا

Integral values

صحیح عددی قیمتیں

Invariants

غیر متغیر

Leading coefficients

صدر سر، فائق سر

Limiting equations

انتہائی مساواتیں

Method of divisors

مقسوم علیہم کا طریقہ، مقسوموں کا طریقہ

Modulus

مقیاس

Multiple roots

ضعفی اصلیں

Numerical equations

عددی مساواتیں

Order and weight of symmetric functions

متشاکل تفاعلوں کا رتبہ

اور وزن

کثیر الارقام، کثیر رقمی

Polynomial

استقبال

Precession

تربیع

Quadrature

کثیر درجی

Quantic

پنج درجی

Quintic

منطق صحیح تفاعل

Rational &amp; Integral function

منطق اور کملہ تفاعل

Reciprocal

متکافئ

Reducing cubic

محول کیسی

Sextic

چھ درجی، شش درجی

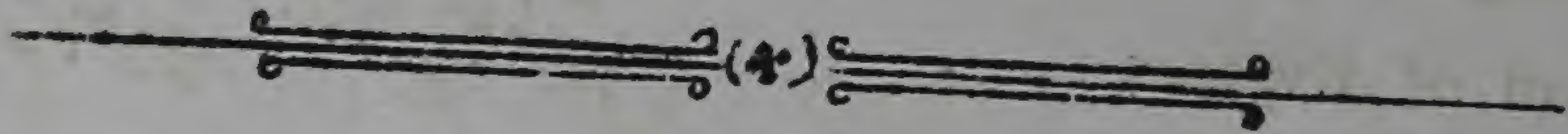
Special roots

خاص اصلیں



Superior limit  
 Symmetric function  
 Transform  
 Transformation  
 Transformed  
 Trial divisor  
 Trinomial

علوی انتہا  
 متشاکل تقا عل  
 ستھیل کرنا  
 استحالہ  
 استحالہ شدہ ستھیل  
 آزمائشی مقسوم علیہ یا مقسم  
 سه رمتی



























**ALLAMA  
IQBAL LIBRARY**

**UNIVERSITY OF KASHMIR  
HELP TO KEEP THIS BOOK  
FRESH AND CLEAN**